

составляющие динамической несущей способности и восстанавливающего момента:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_x + i\bar{F}_y &= \bar{\varepsilon}\bar{G}_{F\varepsilon} + \bar{\vartheta}\bar{G}_{F\vartheta}, \\ \bar{M}_x + i\bar{M}_y &= i(\bar{\varepsilon}\bar{G}_{M\varepsilon} + \bar{\vartheta}\bar{G}_{M\vartheta}), \end{aligned} \right\}$$

где вид функций $\bar{G}_{F\varepsilon}$, $\bar{G}_{F\vartheta}$, $\bar{G}_{M\varepsilon}$ и $\bar{G}_{M\vartheta}$ установлен.

Переход к оригиналам не производится, так как для решения задач, связанных с определением границ области устойчивости ротора, достаточно знать изображения силовых характеристик в зависимости от чисто мнимых значений преобразования Лапласа.

Литература:

1. Лучин Г.А., Пешти Ю.В., Снопов А.И. Газовые опоры турбомашин. М.: Машиностроение. 1989. 240 с.

*Тютюнов Ю. В.,
Сенина И. Н.*

ТРОФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ КАК РЕЗУЛЬТАТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОВЕДЕНИЯ.

Определяющая роль в моделях динамики сообществ популяций, связанных пищевыми отношениями, принадлежит трофическим функциям. Рассмотрим популяцию жертв (N), выедаемых хищниками (P), занимающими более высокий трофический уровень. Общий вид дифференциального уравнения, моделирующего изменение размера популяции жертв в такой системе:

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) - Pg(N, P). \quad (1)$$

Трофическая функция $g(N, P)$, описывающая скорость потребления жертв одним хищником (индивидуальный рацион) наряду с функцией воспроизводства f (которая в моделях пищевых цепей также является трофической функцией для популяций, не являющихся автотрофными) определяет динамические свойства всей модели. Исторически появившаяся первой модель Лотки-Вольтерра [7, 8] $g = g(N) = \beta N$ основана на аналогии молекулярных столкновений и межпопуляционных взаимодействий. Однако эта зависимость реализуется только при

относительно небольших плотностях как популяции жертвы так и хищника [1]. Попытки более корректного описания пищевых взаимодействий привели к возникновению модели Холлинга [6]

$$g = g(N) = \frac{\beta N}{1 + h\beta N}. \text{ Учет взаимодействия хищников в формировании}$$

индивидуального рациона потребовал применения моделей более общего вида $g = g(N, P)$ [1]. Р. Ардити [3] конкретизирует вид трофической функции на основе предположения об определяющей роли отношения числа жертв к числу хищников $\frac{N}{P}$, которое и является аргументом

$$\text{предложенной им трофической функции } g = g(N, P) = g\left(\frac{N}{P}\right) = \frac{\beta N/P}{1 + h\beta N/P},$$

имеющей наиболее простую форму и учитывающей влияние внутривидового взаимодействия в популяции хищников на формирование индивидуального рациона. Эта функция хорошо согласуется как с экспериментальными данными, так и со статистикой натурных наблюдений [4, 5].

Покажем, как активные пищевые миграции в пространственно распределенном сообществе хищник-жертва изменяют свойства локальной трофической функции.

Рассмотрим модель (2), описывающую пищевые миграции хищников обитающих внутри прямоугольного ареала. Изменение скорости активных миграций хищников пропорционально градиенту жертв. Помимо хаотических передвижений, описываемых диффузионным членом, хищник совершает направленные миграции. Популяция жертв, способная лишь к диффузионным перемещениям, растет по логистическому закону, а в качестве функции выедания использована простая функция Лотки-Вольтерра.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \nabla N; \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\operatorname{div}(Pv) + \delta_P \Delta P; \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta NP + \delta_N \Delta N, \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве граничного условия использовано условие непроникновения массы через границу области. Заметим, что, в силу краевых условий и отсутствия процессов размножения и смертности хищников (они лишь выедают жертв, мигрируя внутри ареала), модель

обладает свойством консервативности относительно суммарной численности хищников.

Результаты аналитического и численного исследований описаны в работе [2]. Показано, что в системе возникают автоколебания, обусловленные наличием высокой миграционной активности у хищника (высокие значения параметра α) и наличием неоднородного начального распределения.

Исследуя формирование трофической функции, мы решали задачу численно с использованием явной сеточной аппроксимации и метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом. Расчеты проводились до установления для различных значений коэффициента миграционной активности α и суммарного количества хищников в системе $\langle P \rangle$ (угловыми скобками обозначим интегрирование по области). При этом отслеживалась величина, равная осредненному по времени счету отношению просуммированных по пространству величин $Pg(N)$ и N :

$$Y = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\langle Pg(N) \rangle}{\langle N \rangle} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\langle \beta NP \rangle}{\langle N \rangle} dt.$$

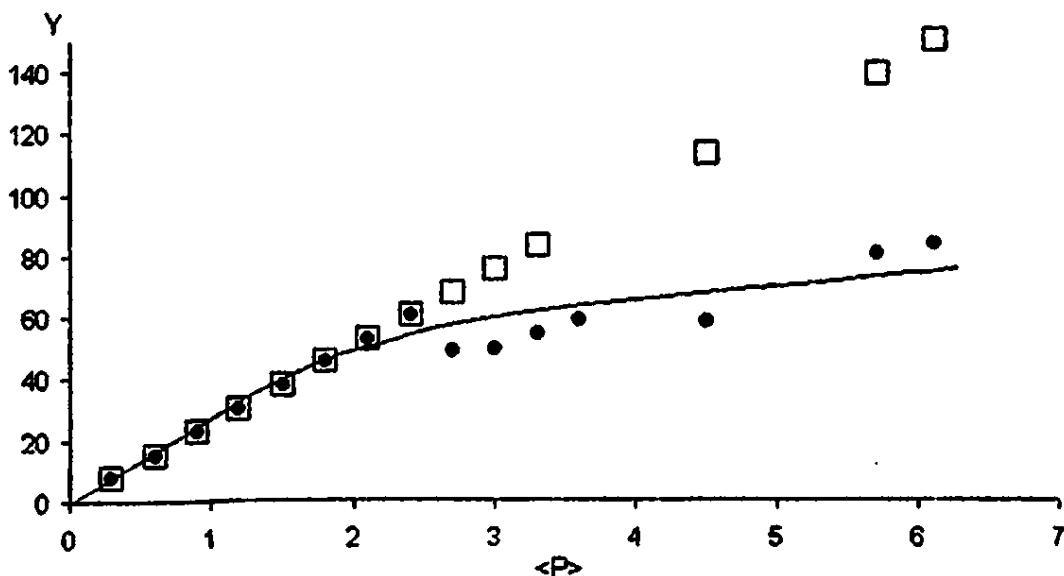


Рис. 1. Значения $Y(\langle P \rangle)$, рассчитанные для значений $\alpha = 0$ (маркированы квадратиками) и $\alpha = 6$ (кружочки).

Интересно, что лишь для $\alpha = 0$ рассчитанные значения ложатся на прямую линию, соответствующую зависимости, описываемой точечной моделью Лотки-Вольтерра $Y = \beta P$ (этот результат естественен, так как установившаяся динамика системы при наличии лишь диффузионных перемещений не отличается от точечной модели). При более высоких значениях коэффициента α получаемая зависимость $Y(\langle P \rangle)$ более не

удовлетворяется функцией Лотки-Вольтерра. Так, при $\alpha = 6$ рассчитанные точки $Y(\langle P \rangle)$ отклоняются от "теоретической" прямой уже при $\langle P \rangle > 2.5$, "насыщаясь" с ростом $\langle P \rangle$.

Таким образом, при агрегировании по времени и по пространству модели (2), локальные трофические отношения в которой описываются функцией Лотки-Вольтерра, до точечной модели использование функции Лотки-Вольтерра (равно как и функции Холлинга) в качестве трофической функции будет совершенно не корректным. В данном случае больше

подойдет трофическая функция Р. Ардити $g = \frac{\beta N/P}{1 + h\beta N/P}$ ("ratio-dependent

function") которая обеспечивает насыщение величины $Y = \frac{\beta}{1 + h\beta N/P}$ с

ростом числа хищников P .

Работа поддержана грантом РФФИ 98-01-00908 и грантом программы "Моделирование и численная имитация" национального фонда научных исследований Франции С.N.R.S.

Литература:

1. Базыкин А. Д. Математическая Биофизика Взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985, 181 с.
2. Говорухин В. Н., Моргулис А. Б., Сенина И. Н., Тютюнов Ю. В. Моделирование активных миграций пространственно-распределенных популяций. //Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, 1998. В печати.
3. Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-dependence. J. Theor. Biol. 1989, 139: 311-326.
4. Arditi R., Ginzburg L., Akçakaya R. Variation in plankton densities among lakes: a case for ration-dependent predation models. The American Naturalist, 1991, v. 138, 5: 1277-1296.
5. Arditi R., Saïah H. Empirical evidence of the role of heterogeneity in ration-dependent consumption. Ecology, 1992, v. 73, 5: 1544-1551.
6. Holling C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. Canadian Entomologist, 1959, 91, 385-398.
7. Lotka A. J. Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925, 460 p.
8. Volterra V. Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte Pour la Vie. P.: Gauthiers-Villars, 1931.