

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**  
**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ, 1 семестр, 2017-2018 уч. год**  
**Направление обучения: Прикладная математика и информатика**

## Оглавление

1. Содержание курса.....	1
2. Литература.....	2
3. Ориентировочный учебный план практических занятий .....	2
4. Учебная карта дисциплины .....	3
5. Контрольные и проверочные работы.....	4
Самостоятельная работа «Введение в анализ» .....	4
Примеры индивидуального задания по модулю 1 .....	4
Контрольная работа по модулю 1 .....	4
Контрольная работа по модулю 2 .....	6
Примеры индивидуального задания по модулю 2 .....	7
Типовые задачи к самостоятельной работе по модулю 3 .....	7
6. Программа экзамена .....	8

## 1. Содержание курса

### Модуль 1. Введение в анализ. Теория пределов. Непрерывность функций.

Функции: определение, операции над функциями. Монотонные функции: определение, теорема об обратимости строго монотонной функции. Основные элементарные функции и их графики.

Элементы теории множеств. Аксиоматика вещественных чисел. Границы и точные границы числовых множеств. Принцип полной математической индукции, пример его применения.

Окрестности точек на числовой прямой и бесконечно удаленных точек. Последовательность: определение и примеры. Предел последовательности и его свойства. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства, связь между ними. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах для последовательностей.

Предельная точка множества. Последовательность вложенных сегментов. Подпоследовательность: определение и примеры, теоремы о подпоследовательностях. Фундаментальная последовательность: определение. Критерий Коши сходимости последовательности.

Различные определения предела функции. Теоремы о пределах функций. Односторонние пределы: определение. Критерий существования предела функции в терминах односторонних пределов. Критерий Коши существования предела функции.

Определение непрерывной функции в точке, примеры непрерывных функций. Локальные свойства непрерывных функций. Замечательные пределы. Функции, бесконечно малые по сравнению с другими функциями при  $x \rightarrow a$  ( $o$ -символика). Эквивалентные функции, теорема о замене эквивалентных функций при вычислении пределов. Функция, непрерывная на множестве  $X$ . Глобальные свойства непрерывных функций. Функция, равномерно непрерывная на множестве  $X$ . Точки разрыва функции, их классификация и примеры.

### Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференцируемость функции в точке и определение производной функции. Эквивалентность дифференцируемости в точке и существования в этой точке производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференциал. Основные теоремы о действиях с дифференцируемыми функциями. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Физическая и геометрическая интерпретации производной.

Свойства функций, дифференцируемых на промежутках. Правила Лопиталю. Формула Тейлора для полиномов, доказательство с ее помощью формулы биннома Ньютона. Формула Тейлора для произвольной

дифференцируемой функции (с различной формой остаточного члена). Разложения по формуле Тейлора в окрестности нуля функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\ln(1+x)$ , применение к вычислению пределов.

Монотонность функции и связь с дифференцируемостью. Точки локального экстремума. Необходимое условие существования экстремума в точке. Достаточное условие существования экстремума в точке  $x$ . Выпуклость графика функции на интервале, связь с второй производной. Точка перегиба графика функции. Полное исследование функции.

### Модуль 3. Неопределенный интеграл

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла (производная неопределенного интеграла и неопределенный интеграл от производной, линейность неопределенного интеграла). Замена переменных в неопределенном интеграле, примеры. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры.

## 2. Литература

*К лекциям:*

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, ч.1. – М.: Проспект, 2004 (и любое другое издание)
2. Коршикова Т.И., Кирютенко Ю.А., Калиниченко Л.И., Савельев В.А. Курс лекций по математическому анализу. 1-й курс, 1-й семестр. – Ростов-на-Дону, 2007

*К практическим занятиям:*

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов. М.: "ЧеРо", 1997 (любое издание)
2. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Физматлит, 2003.
3. Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. Методические указания к практическим занятиям по математическому анализу 1-й курс, 1-й семестр. Введение в анализ. Предел последовательности. – Ростов-на-Дону, 2007
4. Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А., Спинко Л.И. Методические указания к практическим занятиям по математическому анализу 1-й курс, 1-й семестр. Предел и непрерывность функции. – Ростов-на-Дону, 2007
5. Абанина Д.А., Кузьминова А.В. Исследование функций и построение графиков. – Ростов-на-Дону, 2012

## 3. Ориентировочный учебный план практических занятий

1	6.09	Введение в анализ. Функции и графики
2	11.09	Графики функций, Бином Ньютона, метод полной математ. индукции
3	13.09	Метод полной математической индукции
4	20.09	Предел числовой последовательности.
5	25.09	<b>Самост. Работа.</b> Предел числовой последовательности
6	27.09	Предел и ограниченность функции. Вычисление пределов
7	4.10	Вычисление пределов
8	9.10.	Вычисление пределов
9	11.10	Точки разрыва и их характеристика ( <b>инд. задание</b> )
10	18.10	<b>Контрольная работа</b>
11	23.10	Понятие производной и дифференциала, действия с производными
12	25.10	Дифференцирование сложных функций
<b>НЕДЕЛЯ АКТИВНОЙ МОБИЛЬНОСТИ</b>		
13	8.11	Производные и дифференциалы старших порядков, правило Лопиталя
14	13.11	Приложения: монотонность, выпуклость графика
15.	15.11	Полное исследование функции ( <b>инд. задание</b> ). Ф-ла Тейлора.

16	22.11	Формула Тейлора.
17.	27.11	<b>Контрольная работа</b>
18.	29.11	Неопределенный интеграл
19	6.12	Интегрирование по частям, замена переменных
20	11.12	Интегрирование рациональных функций
21	13.12	Интегрирование иррациональных функций
22	20.12	Интегрирование тригонометр. функций, универсальная подстановка
23.	25.12	Контрольная работа
24.	27.12	Подведение итогов семестра

#### 4. Учебная карта дисциплины

№	Виды контрольных мероприятий	Текущий контроль	Рубежный контроль (при наличии)
	<b>Раздел 1.</b> Введение в анализ. Теория пределов, непрерывность функций	<b>12</b>	<b>12</b>
1.	Самостоятельная работа (введение в анализ)	6	
2.	Индивидуальное задание (точки разрыва)	6	
3.	Контрольная работа		12
	<b>Раздел 2.</b> Дифференцируемость функций одного переменного, приложения.	<b>12</b>	<b>18</b>
1.	Индивидуальное задание (графики)	12	
2.	Контрольная работа		18
	<b>Раздел 3</b> Неопределенный интеграл	<b>0</b>	<b>6</b>
1.	Самостоятельная работа		6
	<b>Всего</b>	<b>24</b>	<b>36</b>
	Бонусные баллы	<b>10</b>	<b>Решение задач повышенной сложности с устной защитой</b>
	Промежуточная аттестация в форме экзамена	<b>40</b>	<b>Письменная работа с выполнением заданий разной сложности</b>

## 5. Контрольные и проверочные работы

### Самостоятельная работа «Введение в анализ»

ВАРИАНТ № 1

1. Используя правила преобразования графиков, построить график функции  $y = |x^2 + 5x + 4|$  (2 б)

2. Доказать методом полной мат. индукции равенство  $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{(2n-1)}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$  (1,5 б)

ИЛИ Утверждение о том, что число  $7^{n+1} + 8^{2n-1}$  при любом  $n \geq 1$  делится на 19. (2 б)

3. Найти коэффициент при  $x^5$  в многочлене  $(x^2+2)(3-2x)^7$  (2,5 б) ИЛИ

Упростить  $(a - \sqrt{2})^5 + (a + \sqrt{2})^5$  (2 б)

ВАРИАНТ № 2

1. Используя правила преобразования графиков, построить график функции  $y = |x|^2 - 6|x| + 5$  (2 б)

2. Док-ть методом полной мат. инд-ции: рав-во  $3 + 20 + 168 + \dots + (2n+1)2^{n-1} n! = 2^n (n+1)! - 1$  (1,5б)

ИЛИ Неравенство  $3^n - 2^n \geq n$  (при  $n \geq 1$ ) . (2 б)

3. Найти коэффициент при  $x^5$  в многочлене  $(3-2x^2)(3x-1)^8$  (2,5 б) ИЛИ

Упростить  $(a+2)^6 - (a-2)^6$  (2 б)

### Примеры индивидуального задания по модулю 1

Охарактеризовать точки разрыва:

ВАРИАНТ № 1

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq -2 \\ x+6, & \text{если } -2 < x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x-3}$$

$$в) f(x) = \frac{\sin(x-3)}{|x-3|}$$

ВАРИАНТ № 2

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x < -3 \\ x+13, & \text{если } -3 < x < 0 \\ \lg(x+4), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{|x-3|}{6-x-x^2}$$

$$в) f(x) = \frac{x}{1-3^{x/(x-2)}}$$

### Контрольная работа по модулю 1

ТРЕНИНГ (ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПЕРЕД КОНТРОЛЬНОЙ)

Доказать, используя определение предела посл-сти  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3-1}{n^3-1} = 2$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\cos n}{n^2+2} = 0$

Доказать, используя определение предела функции:  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$ ,

Найти и обосновать, используя свойства предела последовательности, бесконечно малых и бесконечно больших функций:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{3 + \cos n} + \operatorname{arctg} n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 - 2n - n^2} + \sin n)$

Найти пределы последовательности:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right)$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{3n^9 - 2}}{\sqrt{n^3} + 2\sqrt[4]{n^5} - 4n}$ ;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \lg n}{10^n + n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{n^6 + 2n^4 + 1} - n^2 \right)$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-3)^3 - (n-1)(n+2)^2}{(n+1)(n^2+1) - n^3}$

Вычислить пределы функций

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x^3 - 8}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 3x}{x + \sin 4x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 4x}{\arcsin^2 3x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(10^x + 1)}{\ln(x^{10} - 4x + 10)}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 16}{\ln(x^2 - x - 1)}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 x \right)^{1/\ln \cos 3x}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^2 + \sin^2 \pi x \right)^{\operatorname{ctg}(x-1)}$

8)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1}$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[19]{1-4x} - 1}{\arcsin 7x}$

10)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x/2)^{100} - 1}{x^2 - 2x}$

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^{2x} + \sin 3x - 1}$

12)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(10^x + 1)}{e^{5x} - 1}$

ВАРИАНТ № 1

1. Доказать с помощью определения, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 7n} = 5$  (1,5 б)

2. Найти и обосновать: а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} - 3}{\sqrt[n]{3n} + \operatorname{arctg} n}$  (1 б) б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^4 + 1} - n + (-1)^n \right)$  (1 б)

3. Вычислить пределы последовательностей и функций

а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 3^n}{5^n + n!} = 0$  (1 б) б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - 3}{x^2 - 5x - 6}$  (1б); в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right)$  (1 б)

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 2x)}{\sin 3x - \sin 7x}$  (1,5б) д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - e^{2x} \right)^{\operatorname{ctg} 3x}$  (2 б) л)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x - 1}}$  (2б)

БОНУСЫ а)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x} - \pi)^2}}$  (3 б)

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{\sin^3 \pi x}$  (3 б)

ВАРИАНТ № 2

1. Доказать с помощью определения, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2 - 6n} = 2$  (1,5б)

2. Найти обосновать: а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} - 3}{\sqrt[n]{3n} + \operatorname{arctg} n}$  (1 б)      б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n + \sin n}$  (1 б)

3. Вычислить пределы последовательностей и функций

а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3^{-n}}{2^n - n^3}$  (1б)      б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{n^4} + 3n - 2}{\sqrt{n} - 2\sqrt[4]{n^5}}$  (1б)      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin 2x + x + 1)^{\frac{1}{\arcsin 2x}}$  (2б)

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x^2 - 7x + 10}$  (1б)      д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{arctg}^2 4x)}{\cos 8x - \cos 6x}$  (1,5б)      е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{1/x} - e^{1/(x+2)} \right) \sqrt{x^4 - 3x^2 + 5}$  (1б)

БОНУСЫ а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 4^x - \sqrt{x+8} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$  (3 б)      8)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1}$  (3 б)

**Контрольная работа по модулю 2**

ВАРИАНТ № 1

1)  $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x^5 + 5^x)}$ ,  $f'(x)$  - ? (1,5 б)      2)  $f(x) = (1 + 2x)^{\sin(x^2)}$ ,  $df|_{x=1}$  - ? (2,5б)

3)  $f(x) = \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ , ( $x > 0$ ),  $f''(x)$  - ? (3б)      4)  $f(x) = \frac{x^2}{(1 - 3x)^3}$ ,  $f^{(20)}(1)$  - ? (бонус 3б)

5) Найти предел с помощью правила Лопиталья а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - 8 \sin x}{x \arcsin^2 x}$  (2б)      б)  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[5]{x} \ln x$  (1 б)

6) Разложить по формуле Тейлора  $f(x) = \cos^2(3x)$  по степеням  $x$  до  $o(x^{2n+1})$  (3б)

7) Разложить по формуле Тейлора  $f(x) = (x+1) \ln(5+3x)$  по степеням  $x+1$  до  $o((x+1)^n)$  (бонус 3б)

8) Найти с помощью формулы Тейлора  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 e^{2x} + \ln(1-x^2)}$  (2,5 б)

9) Охарактеризовать точки локальные экстремума функции  $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} x^2 - x$  (2,5б)

ВАРИАНТ № 2

1)  $f(x) = \frac{1}{\ln(x^3 + 1) + 3^x}$ ,  $f'(x)$  - ? (1,5 б)      2)  $f(x) = (\sin x)^{\arcsin(x^2)}$ ,  $df|_{x=1}$  - ? (2,5б)

3)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ ,  $f''(x)$  - ? (3б)      4)  $f(x) = x^2 \sin^2 x$ ,  $f^{(21)}(1)$  - ? (бонус 3б)

5) Найти предел с помощью правила Лопиталья а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg}(x^2)}{x \cos x - \sin x}$  (2б)      б)  $\lim_{x \rightarrow +0} \sin^2 x \ln x$  (1 б)

6) Разложить по формуле Тейлора  $f(x) = \frac{x}{(2-x)^2}$  по степеням  $x$  до  $o(x^n)$  (3б)

- 7) Разложить по формуле Тейлора  $f(x) = \ln(3 + 4x + x^2)$  по степеням  $x+1$  до  $o((x-1)^n)$  (бонус 3б)
- 8) Найти с помощью формулы Тейлора  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2) - 2 \sin x + \ln(1 + x^3)}{\operatorname{tg}^3(2x)}$  (3 б)
- 9) Определить направления выпуклости графика функции и точки перегиба для  $f(x) = \ln + 2x^2$  (2б)

### Примеры индивидуального задания по модулю 2

Изучить [5, стр.3-20], построить графики двух функций:

№1. 1)  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ ; 2)  $y = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$ ;

№2. 1)  $y = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^3}$ ; 2)  $y = x^3 e^{-x}$ ;

№3. 1)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ ; 2)  $y = \frac{e^x}{x}$ ;

№4. 1)  $y = \frac{x^2}{x + 4}$ ; 2)  $y = x^2 e^{-x}$ ;

№5. 1)  $y = \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$ ; 2)  $y = x - 5 \operatorname{arctg} x$ ;

### Типовые задачи к самостоятельной работе по модулю 3

1)  $\int \frac{(2 - \cos^2 x) dx}{\cos^2 x}$ ; 2)  $\int (x^4 + 3\sqrt{x} + 3^{2x}) dx$ ; 3)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^{2012} x}{1 + x^2} dx$ ; 4)  $\int x e^{4x} dx$ ;

5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ ; 6)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8 - 1}}$ ; 7)  $\int \cos^2 3x dx$ ; 8)  $\int \frac{\ln x}{x^5} dx$ ; 9)  $\int \sin 3x \sin x dx$ ;

10)  $\int e^{x^4} x^3 dx$ ; 11)  $\int x^2 e^{-2x} dx$ ; 12)  $\int \operatorname{arctg} x dx$ ; 13)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ ; 14)  $\int \frac{\sqrt[5]{1 + \ln x}}{x} dx$ ;

15)  $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3 + 2} dx$ ; 16)  $\int \frac{(\sin^2 x - 2) dx}{\sin^2 x}$ ; 17)  $\int \left( \cos \frac{x}{3} - 2^{3x} - 4\sqrt[5]{x} \right) dx$ ; 18)  $\int x \sin 6x dx$ ;

19)  $\int \sqrt[15]{1 + 2x} dx$ ; 20)  $\int \cos 4x \cos 6x dx$ ; 21)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}$ ; 22)  $\int x(3x - 1)^{15} dx$ ;

23)  $\int \frac{x}{3x - 1} dx$ ; 24)  $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$ ; 25)  $\int \frac{5x + 3 dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

## 6. Программа экзамена

Экзамен проводится в письменной форме в течение 120 минут с последующим обсуждением результатов. Максимально возможная сумма баллов – 40. Экзамен считается сданным при получении не менее 22 баллов. В экзаменационный билет включаются определения и формулировки теорем, доказательство одного из утверждений и теоретические задачи, проверяющие понимание теории.

### ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЭКЗАМЕН

1. Множества, операции с множествами.
2. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано. Принцип полной математической индукции.
3. Действительные числа как множество элементов, удовлетворяющих системе аксиом.
4. Модуль вещественного числа и его свойства.
5. Ограниченные множества (в том числе сверху и снизу). Точная верхняя и нижняя границы множества (по два определения).
6. Бином Ньютона и его применение на практике.
7. Окрестности, лемма о непересекающихся окрестностях.
8. Функция одного вещественного переменного: определение, область определения, график, равенство функций, биективность, инъективность, сюръективность.
9. Числовая последовательность и ее предел (уметь доказывать равенства с помощью определения). Сходящиеся последовательности. **Единственность предела (с доказательством)**.
10. Ограниченные последовательности. Сходящиеся последовательности. Лемма об ограниченности сходящейся последовательности.
11. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах.
12. Бесконечно малые последовательности и их свойства (**о сумме – с доказательством**). Лемма о связи между сходящейся и бесконечно малой последовательностями.
13. Пределы последовательностей  $\{\sqrt[n]{n}\}$ ,  $\{\sqrt[n]{a}\}$ ,  $\{\sqrt[p]{1+x_n}, x_n \rightarrow 0\}$  и их применение.
14. Бесконечно большие последовательности и их свойства. **Лемма о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями (с доказательством)**.
15. **Теорема об арифметических действиях с пределами последовательностей (с доказательством всех утверждений)**
16. Подпоследовательности, теорема о пределе подпоследовательности последовательности, имеющей предел. Следствие о несуществовании предела.
17. Система вложенных отрезков. **Лемма о системе вложенных отрезков (с доказательством)**
18. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Лемма о неограниченной последовательности.
19. Фундаментальная последовательность, лемма об ограниченности фундаментальной последовательности.
20. **Теорема Коши (критерий сходимости последовательности) – с доказательством.**
21. Предельная точка множества. Критерий предельной точки на языке окрестностей. Критерий предельной точки на языке последовательностей. Предельные точки бесконечного множества.
22. Определение предела функции на языке окрестностей, на языке «эпсилон-дельта», доказательства по определению различных предельных равенств.
23. Замечательные пределы (число  $e$  и предел отношения синуса бесконечно малой дуги к бесконечно малой дуге).
24. Теорема Гейне.
25. Свойства предела функции (включая предел суперпозиции и переходы к пределу в неравенствах) – формулировки.
26. Односторонние пределы функции.
27. Критерий Коши существования предела функции.
28. Три определения непрерывности функции в точке. Непрерывность на множестве.
29. Классификация точек разрыва (определения и задачи).

30. Локальные свойства непрерывных функций.

**31. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении (с доказательством),** следствия (формулировки).

32. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

33. Сравнение функций. Замечательные пределы. Эквивалентные функции и переход к эквивалентным при вычислении пределов.

34. Приращения аргумента и функции, понятие о производной функции в точке. **Вывод производных функций**  $f(x) = C$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \ln x$ .

35. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. **Критерий дифференцируемости (с доказательством).** Понятие о дифференциале.

36. Непрерывность функции в точке. Дифференцируемость функции в точке. **Связь между непрерывностью и дифференцируемостью (с доказательством).**

37. **Правила действий с производными (с доказательством).** **Вывод производных функций**  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ . Производная сложной функции.

38. Невертикальная касательная. Необходимое и достаточное условие существования невертикальной касательной. Уравнение касательной к графику функции.

39. Производные и дифференциалы старших порядков (определение, **вывод формул**, формула Лейбница и ее применение).

**40. Теорема Ферма и следствие о касательной (с доказательством)**

**41. Теорема Дарбу и следствие о сохранении знака (с доказательством)**

**42. Теорема Ролля и актуальность ее условий (с доказательством)**

**43. Теорема Лагранжа, два следствия. Критерий постоянства (все с доказательством).**

44. Определения монотонности функции, критерий монотонности. Достаточное условие монотонности.

45. Теорема Коши (без доказательства).

46. Правила Лопиталю (без доказательств) и их применение.

47. Определение точек локального экстремума. Стационарные и критические точки, необходимое условие. Достаточное условие в критической точке (без доказательства).

48. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции на множестве.

**49. Представление многочлена степени  $n$  в виде многочлена Тейлора**

50. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Единственность разложения по формуле Тейлора.

**51. Вывод основных разложений по формуле Тейлора (в окрестности нуля).**

52. Направления выпуклости графика функции, достаточные условия. Точка перегиба графика функции, необходимые и достаточные условия.