

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Мехмат, 1 семестр, 2017-2018 уч. год
Направление обучения: Прикладная математика и информатика
Материалы к практическим занятиям в группе 1

Оглавление

1. Литература.....	1
2. Ориентировочный учебный план.....	1
3. Учебная карта дисциплины	2
4. Контрольные и проверочные работы.....	2
Самостоятельная работа «Введение в анализ»	2
Контрольная работа «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»	3
Контрольная работа «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»	4
Контрольная работа «ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, ПРИЛОЖЕНИЯ».....	5

1. Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов. М.: "ЧеРо", 1997 (любое издание)
2. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Физматлит, 2003.
3. Коршикова Т.И., Калининченко Л.И., Кирюченко Ю.А. Методические указания к практическим занятиям по математическому анализу 1-й курс, 1-й семестр. Введение в анализ. Предел последовательности. – Ростов-на-Дону, 2007
4. Коршикова Т.И., Калининченко Л.И., Кирюченко Ю.А., Спинко Л.И. Методические указания к практическим занятиям по математическому анализу 1-й курс, 1-й семестр. Предел и непрерывность функции. – Ростов-на-Дону, 2007
5. Абанина Д.А, Кузьмина А.В. Исследование функций и построение графиков. – Ростов-на-Дону, 2012

2. Ориентировочный учебный план

1	4.09	пн	Свойства и графики элементарных функций
2	9.09	сб	Полярная система координат, параметрически заданные функции
3	16.09	сб	Метод полной математической индукции
4	18.09	пн	Метод полной математической индукции
5	23.09	сб	Самост. Работа. Понятие о пределе числовой последовательности
6	30.09	сб	Предел и ограниченность последовательности
7	2.10	пн	Вычисление пределов последовательности
8	7.10	сб	Контрольная работа
9	14.10	сб	Подпоследовательности, частичные пределы, предел функции
10	16.10	пн	Вычисление пределов, неопределенности ∞/∞ , $\infty-\infty$
11	21.10	сб	Вычисление пределов, неопределенность $0/0$
12	28.10	сб	Вычисление пределов с помощью замечательных пределов.
13	30.10	пн	Обзорное занятие по вычислению пределов
НЕДЕЛЯ АКТИВНОЙ МОБИЛЬНОСТИ			
14	11.11	сб	Характеризация точек разрыва
15	13.11	пн	Контрольная работа

16	18.11	сб	Понятия производной и дифференциала
17	25.11	Сб	Нахождение производных и дифференциалов
18	27.11	пн	Производные и дифференциалы старших порядков. Правило Лопиталья
19	2.12	сб	Монотонность Наиб.-наим.значение. Выпуклость.
20	9.12	Сб	Полное исследование функции, график.
21	11.12	пн	Формула Тейлора
22.	16.12	сб	Приложение к вычислению пределов.
23	23.12	сб	Контрольная работа
24	25.12	пн	Итоговая письменная работа
25	30.12	сб	Подведение итогов семестра

3. Учебная карта дисциплины

№	Виды контрольных мероприятий	Текущий контроль	Рубежный контроль (при наличии)
	Раздел 1. Предел числовой последовательности	8	12
1.	Проверочные работы	8	
2.	Контрольная работа		12
	Раздел 2. Функции одной переменной(предел и непрерывность)	8	12
1.	Проверочные работы	8	
2.	Контрольная работа		12
	Раздел 3 Дифференциальное исчисление функций одной переменной	8	8
1.	Проверочные работы	8	
2.	Контрольная работа		12
	Всего	24	36
	Промежуточная аттестация в форме экзамена	40	Устный ответ (40 баллов) при условии ответов на все вопросы

4. Контрольные и проверочные работы

Самостоятельная работа «Введение в анализ»

ВАРИАНТ 1

1. Используя правила преобразования графиков, построить график функции $y = |x|^2 - 6|x| + 5$
2. Построить график функции $r = \cos(3\varphi)$ в полярной системе координат
3. Доказать методом полной математической индукции
 - равенство $3 + 20 + 168 + \dots + (2n + 1)2^{n-1}n! = 2^n (n + 1)! - 1$
 - утверждение о том, что число $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ делится на 24.
 - неравенство $3^n - 2^n \geq n$ (при $n \geq 1$)

ВАРИАНТ 2

1. Используя правила преобразования графиков, построить график функции $y = \operatorname{sgn} \frac{x-2}{x+1}$
2. Построить график функции $r = \sin(2\varphi)$ в полярной системе координат
3. Доказать методом полной математической индукции
 - равенство $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{(2n-1)}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$
 - утверждение о том, что число $n(2n^2 - 3n + 1)$ при любом $n \geq 1$ делится на 6
 - неравенство $0,7^n \geq 1 - 0,3n$ (при $n \geq 1$)

Контрольная работа «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

ТРЕНИНГ (ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПЕРЕД КОНТРОЛЬНОЙ)

1. Доказать с помощью определения:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3} - \cos n}{n^2 + 3n - 1} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n + 1} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n + 3} = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{n} - n \right) = -\infty$$

2. Доказать ограниченность последовательности $\left\{ \frac{\operatorname{arctg} n - 1}{n + 3} \right\}; \left\{ 2 \frac{n+1}{n+3} \right\}$

3. Найти и объяснить вычисления: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} - 3}{\sqrt[n]{3n} + \operatorname{arctg} n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n \right);$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + (-1/2)^n \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n + \cos n}$$

4. Найти $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} \dots + \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)} \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 3^n}{5^{n+1} - n};$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^6 + 2n^4 + 1} - n^2 \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{n^4} + 3n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n^5}}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{3n^9} - 2}{\sqrt{n^3} + 2\sqrt[4]{n^5} - 4n}$$

ВАРИАНТ № 1

1. Доказать с помощью определения, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 1}{n^3 - 1} = 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \cos n}{n^2 + 2} = 0$ (5 б)

2. Найти (и полностью обосновать)

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{3} + \cos n + \operatorname{arctg} n) \quad (2 \text{ б}) \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n^2 + \sin n) \quad (2 \text{ б})$$

3. Найти

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-3)^3 - (n-1)(n+2)^2}{(n+1)(n^2+1) - n^3} \quad (2 \text{ б}) \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3^{-n}}{2^n - n^3} \quad (2 \text{ б}) \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{3n^9} - 2}{\sqrt{n^3} + 2\sqrt[4]{n^5} - 4n} \quad (2 \text{ б})$$

4. (доп) Построить график функции $y = \left| x^2 - 4 \right| - x^2$ (2 б)

5. (доп) Методом полной математической индукции доказать, что число $2^{4n-3} + 3^{3n-1}$ делится на 11 при всех $n \geq 1$ (2 б)

ВАРИАНТ № 2

1. Доказать с помощью определения, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 - 4}{n^3 + 7n} = 5$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cos n + 1}{n^2 - 1} = 0$ (5 б)
2. Найти (и полностью обосновать): а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^2 + 1}}{\arctg n}$ (2 б) б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n + (-1)^n \right)$ (2 б)
3. Найти а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n^3 - 1) + (n^2 + 1)^2 - 2(n^2 - 1)^2}{n^2 + (2n + 1)^2}$ (2 б)
 б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 3^n}{5^n + n!} = 0$ (2 б) в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^6 + 2n^4 + 1} - n^2 \right)$ (2 б)
4. (доп) Построить график функции $y = |x^2 + x| - x$ (2 б)
5. (доп) Методом полной математической индукции доказать, что число $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ делится на 17 при всех $n \geq 1$ (2 б)

Контрольная работа «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»

ВАРИАНТ № 1

ВЫЧИСЛИТЬ ПРЕДЕЛЫ (по 2 балла за каждый)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{x(e^{2x} - 1)}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[5]{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin 3x)^{1/(x-\pi)}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x + 2 \arcsin x}{x - \operatorname{tg} 5x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{8^{\sin x} - 8^{\sin 1}}$

БОНУС (3 балла): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1}{1 - \sqrt[3]{\cos x}}$

ВАРИАНТ № 2

ВЫЧИСЛИТЬ ПРЕДЕЛЫ (по 2 балла за каждый)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 8}{x^2 + 5x + 6}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{3x - \operatorname{tg} x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[13]{10-9x} - 1}{3^x - 3}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^x}{\arctg 2x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/(4x-\pi)}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \arcsin^2 4x)}{\cos 8x - \cos 6x}$

БОНУС (3 балла) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 5x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$

Контрольная работа «ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, ПРИЛОЖЕНИЯ»

ТРЕНИНГ (домашнее задание перед контрольной)

1. Найти производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-2x^2}$ в точке $x=0$ (2 б)

2. Найти $f'(x)$: а) $f(x) = \ln^3(\operatorname{tg} \arcsin 3x)$ (2 б); б) $f(x) = (\sin 3x + 3^{\sin x})^{\sqrt{x}}$ (3 б)

3. Вычислить с использованием правила Лопиталю: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{(x-1)^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right)$

в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \sin x}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$

4. Найти первую производную функции $f(x) = \frac{3 - \sin x}{2} \sqrt{\cos^2 x - 2 \sin x} + 2 \arcsin \frac{1 + \sin x}{\sqrt{2}}$, упростить, найти вторую производную (дополнительно)

5. Найти $f^{(22)}(\pi/12)$, $f(x) = \sin 3x \cos 5x$ $f^{(100)}(x)$, $f(x) = x \ln(1-2x)$

6.а) Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{(4+3x)^3}$ по степеням x до $o(x^n)$

б) Разложить функцию $f(x) = (x+1)e^{2x}$ по степеням $x+1$ до $o((+1)x^n)$

7. Вычислить с помощью формулы Тейлора

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - e^{\operatorname{tg} x} + \frac{3}{2}x^2}{x^2 \sin 11x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sin x - x}$

8. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$ определить интервалы монотонности и охарактеризовать точки экстремума

9. Для функции $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ найти точки перегиба

ВАРИАНТ № 1

1) $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x^5 + 5^x)}$, $f'(x)$ - ? (1 б)

2) $f(x) = (1+2x)^{\sin(x^2)}$, $df|_{x=1}$ - ? (1,5б)

3) $f(x) = \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, ($x > 0$), $f''(x)$ - ? (2,5б)

4) $f(x) = \frac{x^2}{(1-3x)^3}$, $f^{(20)}(1)$ - ? (бонус 2б)

5) Найти предел с помощью правила Лопиталю а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - 8 \sin x}{x \operatorname{arcsin}^2 x}$ (1,5б)

б) Разложить по формуле Тейлора $f(x) = x \sqrt[3]{1+2x^2}$ по степеням x до $o(x^{2n+1})$ (2б)

7) Разложить по формуле Тейлора $f(x) = (x+1) \ln(5+3x)$ по степеням $x+1$ до $o((x+1)^n)$ (бонус 2б)

8) Найти с помощью формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cos 3x - e^{2x}}{x \sin 5x}$ (2б)

9) Охарактеризовать точки локальные экстремума функции $f(x) = (x^2 + 1)\arctg x - \frac{\pi}{4}x^2 - x$ (1,5б)

ВАРИАНТ № 2

1) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^3 + 1) + 3^x}$, $f'(x)$ - ? (1 б)

2) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$, $df|_{x=1}$ - ? (1,5б)

3) $f(x) = \arctg \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $f''(x)$ - ? (2,5б)

4) $f(x) = x^2 \sin^2 x$, $f^{(21)}(1)$ - ? (бонус 2б)

5) Найти предел с помощью правила Лопиталя а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctg(x^2)}{x \cos x - \sin x}$ (1,5б)

6) Разложить по формуле Тейлора $f(x) = \frac{x}{(2-x)^2}$ по степеням x до $o(x^n)$ (2б)

7) Разложить по формуле Тейлора $f(x) = \ln(3 + 4x + x^2)$ по степеням $x-1$ до $o((x-1)^n)$ (бонус 2б)

8) Найти с помощью формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2) - 2 \sin x + \ln(1 + x^3)}{\operatorname{tg}^3(2x)}$ (2,5 б)

9) Определить направления выпуклости графика функции и точки перегиба для $f(x) = \ln x + 2x^2$ (1б)