МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.С.НАЛБАНДЯН, Л.И.СПИНКО

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ.
Часть II

Ростов-на-Дону, 2001

.

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

.

Данные методические указания предназначены для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ и включают указания к выполнению контрольных заданий по темам, изучаемым в курсе математического анализа в II семестре. В пособии приводятся образцы решения задач и список рекомендуемой литературы.

Методические указания печатаются в соответствии с решением кафедры математического анализа Ростовского государственного университета, протокол N 10 от 30 июня 2000 г.

©Ю.С.Налбандян, Л.И.Спинко

Содержание

Введение

Данные методические указания содержат основные теоретические факты и рекомендации по решению задач по математическому анализу по темам: определенный интеграл и его приложения; функции многих переменных; дифференциальные уравнения; числовые ряды. Подробную программу курса, список рекомендованной литературы и задачи для закрепления материала можно найти в пособии [1], теоретический материал (в том числе и дополнительные указания по решению задач) — в [2]–[4], общие принципы выполнения и оформления контрольной работы — в методических указаниях [6]. В [7] приведены тексты самих заданий, при этом распределение вариантов и определение объема задания осуществляется преподавателем.

1. Определенный интеграл

Ниже рассматриваются основные способы вычисления определенных интегралов. Все методы опираются на использование формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, а числа b и a —- соответственно, верхний и нижний пределы интегрирования.

1.1. Метод разложения. Суть метода в том, что интеграл с учетом свойства линейности можно представить в виде алгебраической суммы более простых интегралов, вычисление каждого из которых происходит по формуле (1), причем первообразные подынтегральных функций находятся с помощью таблицы неопределенных интегралов. Например,

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{1/2}dx + \int_1^4 x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 + 2x^{1/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) + 2(2-1) = \frac{14}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

1.2. Замена переменных. Предположим, что при вычислении

$\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, для упрощения интеграла требуется ввести новую переменную t, связанную с прежней переменной x соотношением $x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция. Если при этом $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, и сложная функция $f\big(\varphi(t)\big)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$.

Общие правила при проведении замены такие же, как в [6, с.21–24]. Например, при вычисления интеграла $\int\limits_0^7 x\sqrt[3]{1+x}dx$ удобно положить $t = \sqrt[3]{1+x}$. Далее требуется выразить отсюда x, dx (найти дифференциалы левой и правой части полученного равенства) и проследить за изменениям пределов интегрирования. Таким образом, имеем:

$$\int\limits_0^7 x\sqrt[3]{1+x}dx = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[3]{1+x},\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = 7 \longrightarrow t = 2 \end{array} \right| = \int\limits_1^2 (t^3 - 1)t3t^2 dt =$$

$$= 3\int\limits_1^2 (t^6 - t^3)dt = 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = 3\left(\frac{128}{7} - 4 - \frac{1}{7} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1209}{28} = 43\frac{5}{28}.$$

1.3. Интегрирование по частям. Метод опирается на формулу

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu = u(a)v(a) - u(b)v(b) - \int\limits_a^b vdu,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Выбор интегрируемой части (dv) и дифференцируемой (u) осуществляется так же, как для неопределенного интеграла (см. [6, с.19]). Например,

$$\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = \displaystyle\int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} -$$

$$- \int\limits_0^{\ln 2} (-e^{-x})dx = -\ln 2 \cdot e^{-ln2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} == -\frac{\ln 2}{2} - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

Замечание. Вы можете также найти разобранные примеры в методических указаниях [3, стр. 3–8].

2. Приложения определенного интеграла

2.1. Вычисление площади плоской области в декартовой системе координат. Напомним, что **криволинейной трапецией,** соответствующей функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и такой, что $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a, b]$, называется область G, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью OX и двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ (см. Рис.1). Коротко можно записать так: $G = \big\{(x, y) : \ a \leqslant x \leqslant b; \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$. **Геометрический смысл** определенного интеграла заключается в том, что площадь области G в данном случае можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Если $f(x) \leqslant 0$ при всех x из $[a, b]$ (см. Рис.2), то справедлива формула

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Наконец, если область G имеет вид $G = \big\{(x, y) : \ a \leqslant x \leqslant b; \ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$, то для вычисление ее площади применяется формула

$$S = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx. \tag{4}$$

Фактически, в этом случае площадь области рассматривается как разность площадей двух криволинейных трапеций, соответствующих функциям $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. Рис.3).

Замечание 1. Формула (4) остается верной и в том случае, когда одна или обе функции не обязательно являются положительными на $[a, b]$; достаточно того, чтобы график $f(x)$ на всем рассматриваемом отрезке располагался выше графика $g(x)$.

Замечание 2. Область сложного вида рекомендуется представить в виде объединения нескольких криволинейных трапеций, чьи площади можно найти по формулам (2)–(4). Тогда площадь исходной области вычисляется как их сумма.

Пример 2.1. Вычислить площадь области, ограниченной осью OX и линиями $y = x$, $y = 1/x$, $x = 2$.

Решение. Предварительно необходимо построить соответствующие графики и установить область, площадь которой нужно найти. Для данной ситуации это сделано на Рис.4.

Очевидно, что заштрихованная область представляется в виде объединения (суммы) двух криволинейных трапеций. Первая из них, G_1, соответствует функции $y = x$ на отрезке $[0, x_1]$, а вторая, G_2 — функции $y = 1/x$ на отрезке $[x_1, 2]$, гдеx_1 — абсцисса точки пересечения графиков функций $y = x$ и $y = 1/x$. Значения x_1 найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1/x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1/x \end{cases},$$

откуда $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ и окончательно (так как $x_1 \in [0,1]$) $x = 1$.

Таким образом, площадь первой трапеции находим по формуле (2): $S_1 = \int\limits_0^1 x dx = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1/2$; аналогично вычисляем площадь второй трапеции: $S_2 = \int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2$. Наконец, $S = S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2} + \ln 2$.

Пример 2.2. Вычислить площадь области, ограниченной графиками функций $y^2 = 2x$, $x + y = 4$.

Решение. Как и раньше, построим графики соответствующих функций и определим область, площадь которой нужно найти (Рис.5).

Очевидно, что мы опять получили объединение двух областей, причем область G_1 состоит из двух симметричных относительно оси OX частей, поэтому $S_1 = 2S_1'$, где S_1' — площадь той части G_1, которая лежит выше оси OX.

Найдем теперь абсциссы точек пересечения границ области, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x + y = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (4-x)^2 = 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 16 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases},$$

откуда получаем $x = 2$ и $x = 8$. Для вычисления S_1' применяем формулу (2), в которой $f(x) = \sqrt{2x}$, для вычисления S_2 — формулу (4), в которой $f(x) = 4 - x$, $g(x) = -\sqrt{2x}$:

$$S_1' = \int\limits_0^2 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2 x^{1/2}dx = \sqrt{2}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}2^{1/2}2^{3/2} = \frac{8}{3};$$

$$S_2 = \int\limits_2^8 (4 - x + \sqrt{2x})dx = \big(4x - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\frac{2}{3}x^{3/2}\big)\Big|_2^8 =$$

$$= \big(32 - \frac{64}{2} + \frac{2}{3}2^{1/2}(2^3)^{3/2}\big) - \big(8 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\big) = \frac{2}{3}\cdot 32 - 6 + \frac{8}{3} = \frac{38}{3}.$$

Таким образом, окончательно для площади всей области G имеем:

$$S = 2S_1' + S_2 = \frac{2\cdot 8}{3} + \frac{38}{3} = 18.$$

Замечание 3. Криволинейную трапецию можно "спроектировать" и на ось OY. Так, в примере 2.2, определив соответствующие найденным значениям x значения y (для $x = 2$ $y = 2$, для $x = 8$ $y = -4$), G можно описать следующим образом: $G = \big\{(x, y) :\ -4 \leqslant y \leqslant 2,\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 4 - y\big\}$. Тогда

$$S = \int\limits_{-4}^{2} (4 - y - \frac{y^2}{2})dy = \left(4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-4}^{2} = 18.$$

Замечание 4. Обращаем внимание читателя на методические указания [3], где на стр.8–10 также разобраны наиболее важные случаи.

2.2. Вычисление площади плоской области в полярной системе координат. Прежде всего вспомним, что представляет собой полярная система координат. Как известно, для ее введения необходимо выбрать на плоскости точку O, которую называют **полюсом.** Из этой точки проводится луч OX, называемый **полярной осью.** Пусть теперь M —произвольная точка плоскости. Соединив точки O и M, получаем луч OM. **Полярным радиусом** назовем расстояние от полюса до точки M и обозначим этот полярный радиус через r (т.е. $r = |OM|$). Пусть φ — угол, который луч OM образует с полярной осью (величина угла отсчитывается против движения часовой стрелки). Угол φ назовем **полярным** углом. Теперь у точки M есть две характеристики $(r,\ \varphi)$, которые и называются ее **полярными координатами** (см. Рис. 6). Заметим, что полярной оси соответствует луч $\varphi = 0$.

Как следует из определения, полярный радиус всегда неотрицателен (т.е. $r \geqslant 0$). Кроме того, одной и той же точке плоскости, отличной от полюса, соответствует бесчисленное множество значений полярного угла, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Чтобы устранить эту многозначность, принято считать, что φ меняется в промежутке $[0, 2\pi)$, или, в некоторых случаях, на любом интервале длины 2π (допустим, $-\pi \leqslant \varphi < \pi$ или $-\pi/2 \leqslant \varphi < 3\pi/2$). Напомним, что отрицательные значения углов возникают в том случае, когда угол отсчитывается по часовой стрелке.

Если предположить, что полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовой (прямоугольной), а полярная ось — с положительным направлением оси OX (см. Рис. 7), то можно получить (используя известные для прямоугольного треугольника соотношения) формулы, связывающие между собой декартовы и полярные координаты точки M:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь кривую, заданную уравнением $r = r(\varphi)$. Для **построения ее графика в полярной системе координат** необходимо:

а) определить допустимые значения φ, исходя из условия $r \geqslant 0$ и учитывая период функции;

б) задавая допустимые углы φ, составить таблицу значений пар $(r,\ \varphi)$;

в) проводя лучи, образующие с полярной осью углы,значения которых приведены в таблице, откладывать на них соответствующие величины r;

г) соединить полученные точки линией.

Площадь S сектора, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (считаем, что $\alpha < \beta$), вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \tag{6}$$

Пример 2.3. Вычислить площадь области, ограниченной кривой, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $r = 3 + \sin\varphi$.

Решение. Прежде всего, построим график функции $r = 3 + \sin\varphi$. Очевидно, что $r \geqslant 0$ при всех значения φ, следовательно, можно рассматривать φ на любом интервале длины 2π. Заметим еще, что при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2)$ $\sin\varphi$ в силу своей нечетности пробегает одно и то же множество значений (отрезок $[-1, 1]$). Рассмотрим интервал $[-\pi/2, \pi/2]$ и составим соответствующую таблицу:

$$\varphi = -\pi/2 \longrightarrow r = 3 + \sin(-\pi/2) = 2$$

$$\varphi = -\pi/3 \longrightarrow r = 3 + \sin(-\pi/3) = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,13$$

$$\varphi = -\pi/4 \longrightarrow r = 3 + \sin(-\pi/4) = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,3$$

$$\varphi = -\pi/6 \longrightarrow r = 3 + \sin(-\pi/6) = 2,5$$

$$\varphi = 0 \longrightarrow r = 3 + \sin 0 = 3$$

$$\varphi = \pi/6 \longrightarrow r = 3 + \sin(\pi/6) = 3,5$$

$$\varphi = \pi/4 \longrightarrow r = 3 + \sin(\pi/4) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3,7$$

$$\varphi = \pi/3 \longrightarrow r = 3 + \sin(\pi/3) = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,87$$

$$\varphi = \pi/2 \longrightarrow r = 3 + \sin(\pi/2) = 4$$

Построив соответствующие лучи и отложив на них найденные значения r, соединим их плавной линией - и получим половину графика нашей кривой. Вторую половину достроим симметрично исходной (осью симметрии явится прямая, проведенная через полюс O перпендикулярно к полярной оси). На рис. 8 вы видите результат построений.

Интересующая нас область состоит из двух симметричных областей G_1 и G_2, поэтому $S = 2S_1$, где S_1 — площадь сектора, ограниченного заданной кривой и лучами $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$. По формуле (6)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (3+\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (9 + 6\sin\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(9 + 6\sin\varphi + \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{19}{2} + 6\sin\varphi - \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{19}{2}\varphi - 6\cos\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{19}{2}\pi.$$

Окончательно, $S = 2 \cdot \dfrac{19\pi}{2} = 19\pi$.

Пример 2.4. Вычислить площадь области, ограниченной кривой, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $r = 2\cos(2\varphi)$.

Решение. Поскольку r должно быть неотрицательным, из неравенства $\cos(2\varphi) \geqslant 0$ получаем: $2\pi k - \pi/2 \leqslant 2\varphi \leqslant 2\pi k - \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, или

$$\pi k - \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Выбирая значения φ из интервала $[-\pi, \pi])$, из общего решения (7) определяем, что φ меняется в интервалах $[-\pi/4, \pi/4]$ и $[3\pi/4, 5\pi/4]$ (при $k = 0$ и $k = 1$ соответственно). Учитывая, что функция $\cos(2\varphi)$ имеет период π, заключаем, что значения функции на каждом из этих промежутков одинаковы. Следовательно, построив часть кривой, соответствующей отрезку $[-\pi/4, \pi/4]$ и повернув чертеж вокруг O, получим всю границу области. Далее, так как $\cos(2\varphi)$ — функция четная, можно задать значения φ из интервала $[0, \pi/4]$. В частности, имеем:

$$\begin{gathered}
\varphi = 0 \longrightarrow r = 2\cos 0 = 2, \\
\varphi = \pi/8 \longrightarrow r = 2\cos(\pi/4) = \sqrt{2}, \\
\varphi = \pi/6 \longrightarrow r = 2\cos(\pi/3) = 1, \\
\varphi = \pi/4 \longrightarrow r = 2\cos(\pi/2) = 0,
\end{gathered}$$

Итоговый результат построений приведен на Рис.9 (с.11). Очевидно, что интересующая нас область лежит внутри полученных "петель" и состоит из четырех симметричных фрагментов. Найдем площадь S_1 фрагмента, ограниченного заданной кривой, и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$. По формуле (6) имеем:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 4\cos^2(2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi/4} (1 + \cos(4\varphi))d\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{\sin(4\varphi)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + 0 - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно, $S = 4S_1 = \pi$.

Пример 2.5. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $r = 4\cos\varphi$, $r = 2$ $(r \geqslant 2)$.

Решение. Заметим, что график любой кривой $r = a$ представляет собой окружность с центром в полюсе заданного радиуса a (в силу формул (5) уравнение $r = a$ в декартовой системе координат принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$). В нашем случае $a = 2$.

Далее, график кривой $r = 4\cos\varphi$ можно, как и раньше, построить, перебирая допустимые значения φ (из $[-\pi/2, \pi/2]$, так как именно для таких φ получаем, что $\cos\varphi \geqslant 0$). Однако сейчас мы поступим иначе. Из формул (5) следует такая цепочка равносильных уравнений:

$$r = 4\cos\varphi \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Последнее из них в декартовых координатах представляет собой уравнение окружности с центром в точке $(2, 0)$ радиуса 2.

Итак, мы получили чертеж, изображенный на Рис.10.

Заштрихованной оказалась часть плоскости, заключенная между двумя кривыми и отвечающая исходному условию $r \geqslant 2$. Очевидно, что площадь этой области можно найти как разность площадей двух секторов: ограниченного лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и частью кривой $r = 4\cos\varphi$ и ограниченного теми же лучами и частью кривой $r = 2$. Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} 16\cos^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} 4 d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(16\frac{1+\cos(2\varphi)}{2} - 4\right)d\varphi = 2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(1 + 2\cos(2\varphi))d\varphi.$$

Теперь необходимо найти значения φ_1 и φ_2. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} r = 2 \\ r = 4\cos\varphi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi_{1,2} = \pm\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

(учтено, что $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, как было отмечено выше). Итак,

$$S = 2\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}(1 + 2\cos(2\varphi))d\varphi = 2\big(\varphi + \sin(2\varphi)\big)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) - \sin(-\frac{\pi}{3})\right) = 2\left(\frac{2\pi}{3} + 2\sin(\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

Замечание. Можно было учесть симметричность области относительно полярной оси.

Пример 2.6. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $r = 4\cos\varphi$, $r = 2$ $(r \leqslant 2)$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Решение. Кривые даны те же, что в примере 2.5, поэтому построение кривых повторяется. На Рис.11 (с.13) заштрихована часть плоскости, соответствующая условию $r \leqslant 2$ (учтено также то, что $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$). Значения φ_1 и φ_2 также найдены ранее ($\varphi_1 = -\pi/3$, $\varphi_2 = \pi/3$). Рисунок позволяет заметить следующее: 1) интересующая нас область состоит из двух симметричных фрагментов, поэтому $S = 2S_1$, где S_1 — площадь G_1, т.е. области, лежащей "выше" полярной оси; 2) G_1 образована объединением двух секторов: ограниченного лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/3$ и частью кривой $r=2$ и ограниченного лучами $\varphi=\pi/3$, $\varphi=\pi/2$ и частью кривой $r=4\cos\varphi$. Пропуская повторяющиеся выкладки, получаем:

$$S_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3}4d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}16\cos^2\varphi d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi/3}+4\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}(1+\cos(2\varphi))d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{3}+4\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\Big)-\sqrt{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

Окончательно, $S=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

2.3. Длина дуги в декартовых координатах. Как известно, всякая кривая, задаваемая уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, в случае, когда $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и существует ее производная $f'(x)$, также непрерывная на $[a,b]$, имеет определенную длину дуги, которая вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx. \tag{8}$$

Пример 2.7. Найти длину дуги отрезка кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, если x пробегает отрезок $[0,8]$.

Решение. Предварительно найдем (и, по возможности, упростим) первую производную: $f'(x)=\frac{2}{3}(x^{3/2})'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}=\sqrt{x}$. Применяя теперь формулу (8), получаем:

$$l=\int\limits_0^8\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^8=\frac{2}{3}(27-1)=\frac{52}{3}=17\frac{1}{3}.$$

2.4. Вычисление объемов тел вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, соответствующей неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ (см. п.2.1), можно найти по формуле

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx \tag{9}$$

(иллюстрацию см. на Рис.12). Для ситуации, изображенной на Рис.13, справедлива формула

$$V = \pi \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x) dx, \tag{10}$$

а для ситуации , изображенной на Рис.14 — формула

$$V = \pi \int\limits_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x) dx. \tag{11}$$

Пример 2.8. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX области, ограниченной кривыми $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Решение. Соответствующая функции $y = 4/x$ криволинейная трапеция построена на Рис.15 (с.16). Объем тела, получаемого при ее вращении вокруг оси OX, находим по формуле (9):

$$V = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = 16\pi(-\frac{1}{x})\Big|_1^4 = -16\pi(\frac{1}{4} - 1) = 12\pi.$$

Пример 2.9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX области, ограниченной кривыми $y = x^2/3$, $y = x$.

Решение. Графики функций, соответствующая криволинейная трапеция и эскиз тела, полученного при ее вращении вокруг OX, изображены на Рис.16. Абсциссы точек пересечения графиков можно найти, приравняв правые части исходных уравнений: $x^2/3 = x$. Т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Как видно из чертежа, объем необходимо вычислять по формуле (10), полагая $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2/3$. Итак, имеем:

$$V = \pi \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^4}{9}\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \pi\left(9 - \frac{3^5}{5 \cdot 9}\right) = \pi\left(9 - \frac{27}{5}\right) = \frac{18}{5}\pi.$$

3. Функции двух переменных

3.1. Частные производные первого и второго порядков. Необходимые определения читатель может найти в [3, стр. 12–14]. Мы же сейчас дадим некоторые советы по решению примеров. В частности, пусть $z = f(x, y)$ — функция от двух переменных и нам требуется найти производную этой функции по переменной x (используются две формы записи: z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$). В этом случае будем считать переменную y постоянной величиной и дифференцировать функцию по x как функцию одной переменной. Аналогично, чтобы найти производную по y (т.е. $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$), фиксируем в качестве постоянной переменную x. Производные второго порядка находятся по следующим правилам:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \left(z'_x\right)'_y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x.$$

Заметим, что при определенных условиях $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пример 3.1. Найти частные производные первого и второго порядков функции $z = \cos(x^2 + y) + x - 3y^3$.

Решение. Рассматривая в качестве постоянной y, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\sin(x^2 + y) \cdot (x^2 + y)'_x + 1 - 0 = -2x \sin(x^2 + y) + 1.$$

Аналогично, фиксируя x, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\sin(x^2 + y) \cdot (x^2 + y)'_y + 0 - 9y^2 = -\sin(x^2 + y) - 9y^2.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = \left(-2x \sin(x^2 + y) + 1\right)'_x = -2\left[\sin(x^2 + y) + x \cos(x^2 + y) \cdot 2x\right];$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-\sin(x^2 + y) - 9y^2\right)'_y = -\cos(x^2 + y) - 18y;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(z'_x\right)'_y = \left(-2x \sin(x^2 + y) + 1\right)'_y = -2x \cos(x^2 + y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-\sin(x^2 + y) - 9y^2\right)'_x = -2x \cos(x^2 + y)$$

Как видите, в данном случае действительно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3.2. Полный дифференциал функции двух переменных. Полный дифференциал первого порядка функции $z = f(x, y)$ можно найти по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{12}$$

полный дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$ — по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{13}$$

Пример 3.2. Найти полный дифференциал первого порядка функции $z = (3x + 2)^{3-8y}$.

Решение. Предварительно найдем частные производные этой функции первого порядка. Считая y постоянной величиной, получаем сложную степенную функцию $(u(x))^\alpha$, поэтому, дифференцируя ее, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((3x+2)^{3-8y} \right)'_x =$$
$$= (3 - 8y)(3x + 2)^{3-8y-1} \cdot (3x + 2)'_x = 3(3 - 8y)(3x + 2)^{2-8y}.$$

Фиксируя теперь x, получаем сложную показательную функцию $a^{u(x)}$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((3x+2)^{3-8y} \right)'_y =$$
$$= (3x + 2)^{3-8y} \ln(3x + 2) \cdot (3 - 8y)'_y = -8(3x + 2)^{3-8y} \ln(3x + 2).$$

Применяя теперь формулу (12), окончательно получаем:

$$dz = 3(3 - 8y)(3x + 2)^{2-8y} dx - 8(3x + 2)^{3-8y} \ln(3x + 2) dy.$$

Пример 3.3. Найти в точке $M(0, 1)$ полный дифференциал функции $z = \arcsin(5x + y^2/2)$.

Решение. Как и раньше, найдем частные производные первого порядка, затем вычислим их значения в указанной точке (т.е. при $x = 0$, $y = 1$), а напоследок воспользуемся формулой (12). Итак:

$$z'_x = \frac{(5x + y^2/2)'_x}{\sqrt{1-(5x+y^2/2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(5x+y^2/2)^2}}; \quad z'_x(M) = \frac{5}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$z'_y = \frac{(5x + y^2/2)'_y}{\sqrt{1-(5x+y^2/2)^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-(5x+y^2/2)^2}}; \quad z'_x(M) = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$dz\big|_M = \frac{10}{\sqrt{3}}dx + \frac{2}{\sqrt{3}}dy = \frac{10dx + 2dy}{\sqrt{3}}.$$

Рекомендуем также рассмотреть примеры в [3, стр.15–16].

3.3. Производная по направлению и градиент. Пусть $z = f(x, y)$ — функция, определенная в области D, $M(x, y)$ — произвольная точка этой области, а $\bar{l}$ — некоторое направление, заданное "направляющими косинусами" $\cos\alpha$, $\cos\beta$, где α и β — углы, образованные лучом l, выходящим из точки M, с положительными направлениями осей OX и OY соответственно. Заметим, что $\cos\beta = \sin\alpha$.

Если вектор $\bar{l} = (a, b)$ является "единичным", т.е. $|\bar{l}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, то $\cos\alpha = a$, $\cos\beta = b$. В общем случае вектор можно "нормировать", т.е. перейти к вектору, указывающему то же направление, но имеющему единичную длину. Этот переход осуществляется следующим образом:

$$\bar{l} = (a, b) \longrightarrow \bar{l}_1 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{a}{|\bar{l}|}, \frac{b}{|\bar{l}|}\right). \tag{14}$$

Тогда $\cos\alpha = a/|\bar{l}|$, $\cos\beta = b/|\bar{l}|$.

Производная функции $z = f(x, y)$ **в направлении** $\bar{l}$ задает скорость изменения функции в этом направлении и может быть найдена по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}(M) = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\cos\beta, \tag{15}$$

Градиентом функции $z = f(x, y)$ **в точке** M называют вектор с координатами $(\frac{\partial z}{\partial x}(M), \frac{\partial z}{\partial y}(M))$. Иными словами,

$$grad\, f(x, y)\big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\bar{j},$$

где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные векторы, соответствующие положительным направлениям осей OX и OY. Заметим, что из всех производных функции $f(x,y)$ в точке M, взятых по различным направлениям, наибольшее значение всегда имеет производная по направлению, определяемому градиентом функции в этой точке.

Пример 3.4. Пусть $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2-3y}$. Найти: а) $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ в произвольной точке в направлении $\bar{l} = (4,-3)$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ в точке $M(2,1)$ в направлении $\bar{l} = (1,1)$, а также градиент функции в этой точке и величину градиента.

Решение. Найдем частные производные первого порядка для заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2-3y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2-3y}\right)'_x = \frac{(2-3y)^2}{(2-3y)^2+x^2}\cdot\frac{1}{2-3y} = \frac{2-3y}{(2-3y)^2+x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2-3y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2-3y}\right)'_y = \frac{(2-3y)^2}{(2-3y)^2+x^2}\cdot\frac{3x}{(2-3y)^2} = \frac{3x}{(2-3y)^2+x^2}.$$

Найдем теперь длину $\bar{l}$: $|\bar{l}| = \sqrt{16+9} = 5 \neq 1$. Таким образом, вектор нужно пронормировать по формуле (14): $\bar{l}_1 = (4/5, -3/5)$. Мы получили координаты единичного направляющего вектора, т.е. $\cos\alpha = 4/5$, $\cos\beta = -3/5$. Чтобы решить задачу а), необходимо применить формулу (15):

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{2-3y}{(2-3y)^2+x^2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3x}{(2-3y)^2+x^2}\cdot\frac{-3}{5} = \frac{8-12y-9x}{5((2-3y)^2+x^2)}.$$

Чтобы решить задачу б), найдем частные производные функции в указанной точке M, используя уже полученные формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \left.\frac{2-3y}{(2-3y)^2+x^2}\right|_{x=2,y=1} = \frac{-1}{5};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \left.\frac{3x}{(2-3y)^2+x^2}\right|_{x=2,y=1} = \frac{6}{5}$$

. Так как в случае б) $|\bar{l}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, то пронормированный вектор имеет вид $\bar{l}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Подставляя все в формулу (15), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}(M) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$grad\, f(x,y)\big|_M = \frac{-1}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}.$$

Величину (модуль) градиента найдем как длину соответствующего вектора, т.е.

$$\left| grad\, f(x,y)\big|_M \right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{37}}{5}.$$

Замечание. Модуль градиента функции $f(x,y)$ в фиксированной точке M численно равен наибольшей по абсолютной величине скорости изменения функции при переходе произвольной точки через точку M.

3.4. Экстремумы функции двух переменных. Поиск экстремумов функции двух переменных напоминает решение аналогичных задач для функции одной переменной (см. [6, с.15]).Именно, необходимо выполнить следующие действия:

1) Найти частные производные первого порядка заданной функции $z = f(x,y)$ и установить, в каких точках эти производные одновременно обращаются в нуль (такие точки называются *стационарными*). Для этого решается система уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

Замечание. Точки, в которых первые производные одновременно обращаются в нуль или не существуют, называются критическими.

2) Пусть $M(x_0, y_0)$ — стационарная (критическая) точка. Теперь нужно найти частные производные второго порядка заданной функции в точке M:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M), \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$$

и вычислить величину $\Delta = AC - B^2$.

3) Если $\Delta > 0$, то M — точка экстремума, причем если $A > 0$ — тоска минимума, если $A < 0$ — точка максимума. Если $\Delta < 0$, то M не является точкой экстремума. Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

4) Для найденных точек экстремума необходимо вычислить экстремальные значения функции (*экстремумы функции*), т.е. найти $f(x_0, y_0)$.

Пример 3.5. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. Функция определена и дифференцируема в любой точке (x, y), поэтому множество критических точек совпадает с множеством стационарных. Находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x; \qquad z'_y = -2xy + 2y = -2y(x-1).$$

Теперь приравниваем их к нулю и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2y(x-1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Для первой из систем получаем:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(3x+5) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \end{cases}$$

для второй —

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6 - y^2 + 10 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Мы нашли четыре критические точки: $M_1(0,0)$, $M_2(-5/3,0)$; $M_3(1,4)$; $M_4(1,-4)$.

Вычислим теперь вторые частные производные:

$$z''_{xx} = 12x + 10; \qquad z''_{xy} = -2y; \qquad z''_{yy} = -2x + 2. \tag{16}$$

Чтобы для каждой точки найти характеристики A, B, C, Δ, подставляем в (16) соответствующие координаты. В частности, для точки M_1 имеем: $A = 10$, $B = 0$, $C = 2$, $\Delta = 20$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, M_1 — точка экстремума (минимума); $z_{min} = z(M_1) = 0$.

Для точки M_2: $A = -10$, $B = 0$, $C = 16/3$, $\Delta = -160/3$. Так как $\Delta < 0$, в точке M_2 экстремума нет.

Для точки M_3: $A = 22$, $B = -8$, $C = 0$, $\Delta = -64$. Так как $\Delta < 0$, в точке M_3 экстремума нет.

Для точки M_4: $A = 22$, $B = 8$, $C = 0$, $\Delta = -64$. Так как $\Delta < 0$, в точке M_4 экстремума нет.

3.5. Абсолютный экстремум функций одной и двух переменных. Как известно, под *абсолютным максимумом (минимумом) функции* понимается ее наибольшее (наименьшее) значение, достигаемое на определенном множестве изменения независимых переменных. Доказано, что функция, непрерывная на отрезке (случай одной переменной) или на ограниченном замкнутом множестве (случай двух переменных), достигает абсолютных экстремумов либо во внутренних стационарных точках, либо на границе. При поиске абсолютного экстремума необходимо выбрать все критические точки внутри области и на границе, а затем найти в них значения функции и сравнить между собой.

Пример 3.6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 + 6x$ на отрезке $[-5, 7]$.

Решение. Граничными в рассматриваемом случае являются значения $x = -5$, $x = 7$. Функция определена и дифференцируема на всем отрезке $[-5, 7]$. Найдем внутренние стационарные точки (точки, которые лежащие в интервале $(-5, 7)$, в которых производная обращается в нуль):

$$f'(x) = 6x + 6; \qquad 6x + 6 = 0 \Longleftrightarrow x = -1, \quad -1 \in (-5, 7).$$

Далее, $f(-1) = 3 - 6 = -3 \qquad f(-5) = 75 - 30 = 45; \quad f(7) = 147 + 42 = 189.$

Очевидно, что $\max\limits_{[-5,7]} f(x) = f(7) = 189; \qquad \min\limits_{[-5,7]} f(x) = f(-1) = -3.$

Пример 3.7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2xy - 4x - 2y$ на области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 3$, $y = x$.

Решение. Прежде всего, построим нашу область D (см. Рис.17).

Функция дифференцируема всюду в области D и на ее границе. Чтобы найти внутренние стационарные точки, найдем первые производные $f(x, y)$ и приравняем их к нулю. Решая систему, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Итак, $C(1, 2)$ — внутренняя критическая точка. Выделим как "подозрительные" точки вершины построенного треугольника $O(0, 0)$, $A(0, 3)$, $B(3, 3)$, и исследуем границы области. Интервал OA задается уравнением $x = 0$, при этом $y \in (0, 3)$. Очевидно, что на OA поведение исходной функции совпадает с $f_1(y) = f(0, y) = -2y$. Это линейная монотонная функция ($f_1'(y) = -2 < 0$ при всех $y \in (0, 3)$), поэтому критических точек на OA нет.

Аналогичная ситуация возникает для интервала AB, задаваемого уравнением $y = 3$ при $x \in (0, 3)$. Именно, $f_2(x) = f(x, 3) = 6x - 4x - 6 = 2x - 6$, $x \in (0, 3)$; $f_2('x) = 2 > 0$. Поскольку поведение $f(x, y)$ на AB совпадает с поведением $f_2(x)$, заключаем, что и на этом интервале критических точек нет.

Наконец, рассмотрим интервал OB, уравнение которого — $y = x$, $x \in (0, 3)$. Получаем: $f_3(x) = f(x, x) = 2x^2 - 4x - 2x = 2x^2 - 6x$, $x \in (0, 3)$. Функция $f_3(x)$ дифференцируема на указанном интервале, причем $f_3'(x) = 4x - 6$. Приравнивая $f_3'(x)$ к нулю, находим стационарную точку этой функции: $x = 3/2$. Так как $3/2 \in (0, 3)$, находим соответствующее значение y. Таким образом, точка $M(3/2, 3/2)$ оказывается стационарной (критической) для исходной функции.

Найдем теперь значения функции в отобранных точках:

$$f(O) = f(0, 0) = 0;$$
$$f(A) = f(0, 3) = -6;$$
$$f(B) = f(3, 3) = 18 - 12 - 6 = 0$$
$$f(C) = f(1, 2) = 4 - 4 - 4 = -4$$
$$f(M) = f(3/2, 3/2) = 2 \cdot (9/4) - 6 - 3 = -9/2.$$

Сравнивая эти значения между собой, получаем:

$$\max_D f(x, y) = f(O) = f(B) = 0; \quad \min_D f(x, y) = f(A) = -6.$$

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Основные понятия и определения. Напоминаем, что **дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$,** где F — математическое выражение, связывающее неизвестную функцию y, ее производную и независимую переменную (аргумент) x. **Решением** дифференциального уравнения является любая функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. **Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется его решение $y = f(x, C)$ (т.е. решение, содержащее одну произвольную независимую константу C). Если общее решение получено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то оно называется **общим интегралом** заданного уравнения. Любое решение дифференциального уравнения, которое можно получить из общего, приписав определенные значения произвольной постоянной, называется **частным решением.** Если мы ищем решение (частное!) исходного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, то говорят, что мы **решаем Задачу Коши.**

4.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Уравнения названного вида могут быть записаны в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dy + P_2(x)Q_2(y)dx = 0 \tag{17}$$

или

$$P_1(x)Q_1(y)y' + P_2(x)Q_2(y) = 0;$$

(учтено, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$). Для решения таких уравнений необходимо **разделить переменные** , т.е. собрать около dx и dy выражения, содержащие только соответствующие ("одноименные") переменные. В частности, предполагая, что $P_1(x)Q_2(y) \neq 0$, можно разделить (17) на $P_1(x)Q_2(y)$:

$$\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy + \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = 0;$$

$$\int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy + \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = C;$$

$$f(y) + g(x) = C,$$

где $f(y)$ и $g(x)$ — функции, полученные после взятия неопределенного интеграла, т.е. первообразные для соответствующих подынтегральных функций. Равенство $f(y) + g(x) = C$ и дает общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

Замечание. Если рассмотреть дополнительно случаи, когда $P_1(x) = 0$ или $Q_2(y) = 0$, можно найти решения исходного уравнения, не попадающие в общее ни при каких занчениях постоянной C. Такие решения называются **особыми.**

Пример 4.1. Решить уравнение $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$.

Решение. Замечаем, что уравнение можно преобразовать, выделив множители, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$y^2(1 + x)dx + x^2(1 - y)dy = 0.$$

Чтобы разделить переменные, делим наше выражение на y^2x^2 (считая, что $y^2x^2 \neq 0$) и интегрируем полученное равенство:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0;$$
$$\int \frac{1+x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C.$$

Найдем интегралы (точнее, найдем хотя бы одну первообразную для каждой из подынтегральных функций):

$$\int \frac{1+x}{x^2}dx = \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} + \ln|x|;$$
$$\int \frac{1-y}{y^2}dy = \int y^{-2}dx - \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{y} - \ln|y|$$

откуда $-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$, а это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения.

При $x = 0$ и $y = 0$ (те случаи, которые были исключены при разделении переменных) исходное уравнение обращается в тождество. Так как в общее решение эти значения не входят (аргумент логарифма всегда строго положительный), получаем, что $x = 0$, $y = 0$ — особые решения.

Пример 4.2. Найти решение задачи Коши: $(1 + e^x)yy' = e^x$; $y(0) = 1$.

Решение. Чтобы решить задачу Коши, необходимо сначала найти общее решение заданного уравнения. Предварительно приведем его к виду (17).

Для этого воспользуемся соотношением $y' = \dfrac{dy}{dx}$, подставим его в исходное уравнение и затем умножим все на символ dx. Собирая все в левой части, получаем:

$$(1+e^x)ydy - e^x dx = 0.$$

Делим на отличное от нуля выражение $(1+e^x)$ и приходим к уравнению с уже разделенными переменными, которое затем интегрируем:

$$ydy - \frac{e^x dx}{1+e^x} = 0;$$

$$\int ydy - \int \frac{e^x dx}{1+e^x} = C;$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x) = C.$$

Таким образом мы нашли общее решение уравнения:

$$y^2 = 2(\ln(1+e^x) + C).$$

Так как $y(0) = 1$, подставляем $x = 0$ и $y = 1$:

$$1 = 2(\ln 2 + C); \qquad C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2.$$

4.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения, имеющие вид

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{18}$$

называются **линейными.** Их можно решать как **методом вариации постоянной,** так и **методом Бернулли.** Проиллюстрируем на примере последний, основанный на поиске решения в виде произведения двух функций со специальными свойствами.

Пример 4.3. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$.

Решение. Положим $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Подставим выражения для y и y' в исходное уравнение и приведем подобные:

$$u'(x)v(x) + u(x)\Big(v'(x) + 2xv(x)\Big) = 2x^2e^{-x^2} \qquad (19.)$$

Чтобы найти функцию $v(x)$, приравняем выражение, стоящее при $u(x)$, к нулю и решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v'(x) + 2xv(x) = 0.$$

Учитывая, что $v'(x) = \dfrac{dv}{dx}$, приводим его к виду (17) и разделяем переменные:

$$dv + 2xvdx = 0;$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\ln|v| = -x^2 \qquad \text{или} \qquad v(x) = e^{-x^2}$$

(нам достаточно выбрать **одно конкретное решение** этого уравнения). Подставим теперь найденную функцию $v(x)$ в уравнение (19) и учтем, что второе слагаемое в левой части обратилось в нуль:

$$u'(x)e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}.$$

Так как $e^{-x^2} \neq 0$ и $u' = \dfrac{du}{dx}$,имеем:

$$du = 2x^2dx \qquad \text{или} \qquad u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Итак, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = u(x)v(x) = (\frac{2}{3}x^3 + C)e^{-x^2}.$$

Замечание. Как было отмечено выше, при решении линейных уравнений первого порядка можно пользоваться **методом вариации постоянной.** На первом этапе необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения (уравнения, в котором присутствуют слагаемые, содержащие y и y'). Это уравнение первого порядка, поэтому в общее решение входит одна константа C. Затем полагаем $C = C(x)$, подставляем соответствующие выражения для y и y' в исходное уравнение и находим вид функции $C(x)$. Для рассмотренного выше уравнения, например, можно провести следующие рассуждения.

Рассматривая уравнение $y' = -2xy$, получаем:

$$\frac{dy}{y} = -2xdx; \qquad \ln|y| = \ln C - x^2; \qquad \frac{|y|}{C} = -x^2,$$

т.е. общее решение имеет вид $y = Ce^{-x^2}$. Полагаем $C = C(x)$, тогда $y = C(x)e^{-x^2}$, $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$, и исходное уравнение принимает вид

$$e^{-x^2}\big(C'(x) - 2xC(x) + 2xC(x)\big) = 2x^2e^{-x^2},$$

откуда

$$C'(x) = 2x^2; \qquad C(x) = \frac{2x^3}{3} + C_1,$$

а общее решение исходного уравнения —

$$y(x) = e^{-x^2}\big(C_1 + 2x^3/3\big).$$

Как видите, оно совпало с тем, которое было получено при использовании метода Бернулли.

4.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. К уравнениям такого типа относятся уравнения вида

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0, \tag{20}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени. Напомним, что функция $f(x, y)$ называется **однородной n–й степени,** если при всех x, y справедливо равенство $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ $(n \geqslant 0)$. Например, $f(x, y) = \ln(1 + y/x)$ — однородная функция 0–й степени, $x + y$ — однородная функция первой степени, $x^2 + 3xy + y^2$ — однородная функция второй степени, $x + y + 3$ — многочлен, не являющийся однородным.

В общем случае однородные дифференциальные уравнения первого порядка можно привести к виду $y' = \varphi(y/x)$, поэтому для их решения рекомендуется представление искомой функции в виде $y = xt(x)$, что позволяет свести (20) к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4.4. Решить Задачу Коши

$$2x^2dy - (x^2 + y^2)dx = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Решение. Чтобы найти общее решение заданного уравнения, положим $y = xt(x)$. Тогда $dy = tdx + xdt$, и уравнение принимает вид

$$2x^2(tdx + xdt) - (x^2 + x^2t^2)dx = 0.$$

Считая, что $x \neq 0$, разделим уравнение на x^2 и соберем вместе слагаемые с одинаковыми дифференциалами:

$$2xdt - (1 + t^2 - 2t)dx = 0.$$

Разделим переменные в этом уравнении, считая, что $x(t^2 - 2t + 1) \neq 0$ и замечая, что $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$:

$$\frac{2dt}{(t-1)^2} - \frac{dt}{dx} = 0;$$
$$\int \frac{2dt}{(t-1)^2} - \int \frac{dt}{dx} = C;$$
$$-\frac{2}{t-1} - \ln|x| = C.$$

Учитывая, что $t = \dfrac{y}{x}$, получаем общее решение исходного уравнения:

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|x| + C. \tag{21}$$

Чтобы найти решение Задачи Коши, подставляем заданные значения $x = 1$ и $y = 0$ в (21): $\dfrac{2}{1} = 0 + C$, т.е. $C = 2$. Окончательный ответ:

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|x| + 2.$$

5. Числовые и функциональные ряды

5.1. Числовые ряды. Основные понятия. Как известно, если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, то формальная сумма

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{22}$$

называется **числовым рядом с общим членом** a_n**.** k**–й частичной суммой** такого ряда называется сумма первых k слагаемых, т.е

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Говорят, что ряд (22) сходится, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$. На практике, однако, чаще всего проверяют не определение, а выполнение некоторых условий (т.е. выясняют, удовлетворяет ли ряд тому или иному признаку сходимости). Ниже приводятся наиболее существенные из них.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (22) сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Замечание 1. Обратное неверно, так как из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ сходимость ряда не вытекает (достаточно вспомнить, например, расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, общие члены которых стремятся к нулю).

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (22) расходится.

Если все элементы ряда неотрицательны, т.е. если $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ряд называется **знакоположительным.** Для исследования сходимости таких рядов существуют различные **достаточные** признаки. Приведем некоторые из них.

Признак сравнения в форме неравенств. Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, начиная с некоторого номера n. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$; если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (т.е. из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими,а из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими).

Признак сравнения в предельной форме. Если $a_n > 0$, $b_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n/b_n\big) = K > 0$ $(K \neq \infty)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Замечание 3. Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Замечание 4. При применении признака сравнения оказывается полезной информация о поведении *эталонных рядов.* В частности, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \tag{23}$$

сходится, если $|q| < 1$, и расходится при $|q| \geqslant 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \tag{24}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$

Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ при любом n и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Если $q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; при $q = 1$ ничего о поведении ряда сказать нельзя.

Наряду со знакоположительными рядами встречаются и **знакопеременные,** т.е. ряды, часть членов которых положительна, часть — отрицательна. Известно, что если ряд (знакоположительный!) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то будет сходится и знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (обратное неверно!). Таким образом, знакопеременные ряды можно разбить на 3 класса:

1) те, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится (такие ряды называют **абсолютно сходящимися);**

2) те, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (**условно сходящиеся);**

3) те, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (**расходящиеся).**

Для решения вопроса о сходимости знакопеременного ряда также необходимо использовать специальные достаточные признаки. Приведем формулировку одного из них.

Признак Лейбница. Пусть $c_n > 0$ при любом n, последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает (т.е $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_n \geqslant ...$ или, другими словами, при любом $n \geqslant 1$ $c_n \geqslant c_{n+1}$) и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ сходится.

5.2. Исследование числовых рядов на сходимость и абсолютную или условную сходимость. Порядок рассуждений при исследовании ряда вида (22) на **сходимость** может быть следующим:

1) определить знак общего члена ряда, чтобы выяснить, какими признаками можно пользоваться (для знакоположительных рядов применяются признак сравнения и признак Даламбера, к знакопеременным рядам — признак Лейбница);

2) найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (если предел равен нулю - исследование продолжается, если отличен от нуля - можно делать вывод о расходимости ряда и завершать работу);

3) проверить выполнение условий выбранного признака и сделать окончательный вывод.

На **абсолютную–условную сходимость** проверяются только знакопеременные ряды! При этом можно придерживаться следующей схемы:

1) Проверить выполнение необходимого условия для исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Исследовать поведение ряда из модулей (ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$). Из его сходимости следует абсолютной сходимость исходного ряда и исследование завершено. Если такой ряд расходится, то необходимо вернуться к исходному ряду и проверить его сходимость с помощью признака Лейбница. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, сделать вывод о его условной сходимости (в

силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$).

Пример 5.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n+2}{3n-1}$.

*Решение.*Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{n+2}{3n-1} = \sin(1/3) \neq 0$, то рассматриваемый ряд расходится (не выполняется необходимое условие сходимости).

Пример 5.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{3^n}$.

Решение. Очевидно, что $\dfrac{\cos^2 n}{3^n} > 0$ при всех n, ряд является знакоположительным, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{3^n} = 0$. Используем для его исследования признак сравнения в форме неравенств. Так как $\dfrac{\cos^2 n}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{3^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/3)^n$ сходится (см. эталонный ряд (23)), исходный ряд тоже будет сходиться.

Пример 5.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$.

Решение. Так как $\dfrac{n^2+2}{n^2+1} > 1$ при всех n, $a_n = \ln \dfrac{n^2+2}{n^2+1} > 0$, ряд знакоположительный. Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^2+2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1+2/n^2}{1+1/n^2} = 0,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2/n^2}{1+1/n^2} = 1$. Но отсюда также следует (в силу известных соотношений эквивалентности), что

$$\ln \frac{n^2+2}{n^2+1} \sim \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится как эталонный (см. (24)), исходный ряд сходится в силу замечания 4.

Пример 5.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$.

Решение. В данном случае $a_n = \dfrac{n!}{10^n} > 0$ при всех n. Поскольку в общем члене ряда присутствует факториал $(n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n)$, исследование его удобно проводить с помощью признака Даламбера. Имеем:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!10^n}{10^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty.$$

Так как $q > 1$, ряд расходится.

Пример 5.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$.

Решение. В данном случае знак общего члена ряда $a_n = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ меняется в зависимости от степени, в которую возводят -1, поэтому ряд — знакопеременный. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} = 0$ (как произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей), требуется применить признак Лейбница. Очевидно, что $c_n = \sin\frac{1}{n} > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $n < n+1$ и $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Функция $y = \sin x$ в окрестности нуля возрастает, поэтому $\sin\frac{1}{n} > \sin\frac{1}{n+1}$, т.е. $c_n > c_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Выполнены все условия признака Лейбница, поэтому исходный ряд сходится.

Пример 5.6. Исследовать абсолютную–условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2+n+1}$.

Решение. Поскольку функция синуса меняет свой знак, исходный ряд является знакопеременным. Прежде всего рассмотрим ряд из модулей общих членов, т.е. ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2+n+1}. \tag{25}$$

Это знакоположительный ряд, причем

$$\frac{|\sin n|}{n^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n^2(1+(1/n)+(1/n^2))} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ является сходящимся (см. эталонный ряд (24)), ряд (25) сходится по признакам сравнения в форме неравенств и в предельной форме, а исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 5.7. Исследовать абсолютную–условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Решение. Множитель $(-1)^n$ обеспечивает чередование знака общего члена $a_n=(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ данного ряда. Рассмотрим модуль общего члена:

$$|a_n|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}+1)}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/2}}.$$

Постоянный множитель не влияет на сходимость ряда, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как эталонный (см. (24) при $\alpha=1/2<1$), поэтому по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Следовательно, исходный ряд не обладает абсолютной сходимостью.

Применим теперь к исходному ряду признак Лейбница, учитывая, что $c_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0$ при всех n. Как было показано выше, $c_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$. Так как при любом $n\geqslant 1$ $n\leqslant n+1$, имеем, учитывая свойства неравенств:

$$\begin{gathered}
n\leqslant n+1 \qquad \text{и} \qquad n+1\leqslant n+2;\\
\sqrt{n}\leqslant\sqrt{n+1} \qquad \text{и} \qquad \sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{n+2};\\
\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2};\\
\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}},
\end{gathered}$$

т.е. при любом $n\geqslant 1$ $c_n\geqslant c_{n+1}$. Тем самым доказана монотонность последовательности $\{c_n\}$.

Поскольку выполнены все условия признака Лейбница, исходный ряд сходится. А в силу отсутствия у него абсолютной сходимости — сходится условно.

Пример 5.8. Исследовать абсолютную–условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n+1}$.

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n+1}=0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Рассмотрим ряд из модулей, т.е. ряд с общим членом $1/(\ln n+1)$. Поскольку при всех $n \geqslant 1$ $\ln n < n$, получаем:

$$\frac{1}{\ln n+1} = \frac{1}{\ln n(1+1/\ln n)} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по признакам сравнения в форме неравенств и в предельной форме расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n+1}$. Таким образом, у исходного ряда абсолютной сходимости нет.

Далее, $c_n = 1/(\ln n+1) > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ и остается проверить монотонное убывание последовательности $\{c_n\}$ по уже известной схеме. Так как $\forall n \geqslant 1$ $n < n+1$, то

$$\ln n < \ln(n+1); \quad \ln n+1 < \ln(n+1)+1; \quad \frac{1}{\ln n+1} > \frac{1}{\ln(n+1)+1}.$$

Таким образом, $\forall n \geqslant 1$ $c_n > c_{n+1}$. Итак, все условия признака Лейбница выполнены, исходный ряд сходится. Учитывая отсутствие абсолютной сходимости, замечаем, что он сходится условно.

Замечание. Дополнительные теоретические сведения и разобранные примеры можно найти также в [5, с.19–25].

5.3. Степенные ряды. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)+$$
$$+c_2(x-a)^2 + \dots + C_{n-1}(x-a)^{n-1} + C_n(x-a)^n + \dots, \tag{26}$$

где c_n **— числа (их называют коэффициентами степенного ряда)**, a — фиксированное число, x — переменная величина (аргумент).

Для любого степенного ряда, как известно, существует конечное или бесконечное неотрицательное число R, называемое **радиусом сходимости** этого ряда, такое, что:

1) при $0 < R < +\infty$ степенной ряд (26) сходится абсолютно для x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < R$ (т.е. для x из интервала $(a-R, a+R)$, называемого **интервалом сходимости**), и расходится для x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| > R$; случаи $|x-a| = R$ (т.е. $x = a-R$, $x = a+R$) требуют дополнительного исследования;

2) при $R = 0$ степенной ряд (26) сходится только для $x = 0$;

3) при $R = +\infty$ ряд (26) сходится абсолютно на всей числовой прямой.

В случае, когда все коэффициенты ряда (26) отличны от нуля, его радиус сходимости можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{27}$$

если этот предел существует.

Таким образом, при изучении степенного ряда (26) с ненулевыми коэффициентами необходимо:

1) выписать значение a и коэффициенты c_n;

2) найти по формуле (27) радиус сходимости ряда и выписать интервал сходимости;

3) исследовать числовые ряды, получающиеся из (26) при подстановке $x = a - R$ и $x = a + R$;

4) выписать области абсолютной сходимости и сходимости ряда.

Пример 5.9. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(3n-2)(x+1)^n}{3^n}$.

Решение. В данном случае $a = -1$, $c_n = \dfrac{3n-2}{3^n}$. Вычисляем радиус сходимости по формуле (27):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n-2)3^{n+1}}{3^n(3n+3-2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n(3-2/n)}{n(3+1/n)} = 3.$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно, если $|x+1| < 3$, т.е. интервал сходимости — $(-1-3, -1+3)$, или $(-4, 2)$.

При $x = 2$ исходный степенной ряд превращается в числовой $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n-2)$. Так как $3n - 2 \to +\infty$ при $n \to +\infty$, этот ряд расходится (см. Замечание 1 в п.5.1.).

Аналогично, при $x = -4$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3n-2)$, для которого тоже не выполняется необходимое условие, и потому этот ряд расходится.

Таким образом, в данном примере интервал сходимости, область абсолютной сходимости и область сходимости совпадают и представляют собой интервал $(-4, 2)$.

Пример 5.10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

Решение. Для этого ряда $a = 2$, $c_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. Ищем радиус сходимости по формуле (27):

$$R = \lim_{n\to\infty} \Big| \frac{n^2+2n+1+1}{n^2+1} \Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+(2/n)+(2/n^2))}{n^2(1+1/n)} = 1.$$

Таким образом, интервал сходимости имеет вид $(2-1, 2+1) = (1, 3)$.

При $x = 3$ получаем знакоположительный числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}. \tag{28}$$

Так как $\dfrac{1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится как эталонный, делаем вывод о сходимости (в силу признака сравнения) ряда (28) (можно считать, что в данном случае абсолютная сходимость совпала с обычной сходимостью — в силу знакоположительности ряда).

При $x = 1$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}. \tag{29}$$

Это знакопеременный ряд, однако ряд из модулей его общих членов совпадает с рядом (28) и, следовательно, сходится. А потому ряд (29) сходится абсолютно.

Таким образом, интервал сходимости — $(1, 3)$, а области абсолютной сходимости и сходимости совпадают и представляют собой отрезок $[1, 3]$.

Пример 5.11. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Решение. В данном случае $a = 0$, $c_n = \dfrac{x^n}{n}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Поэтому интервал сходимости имеет вид $(-1, 1)$.

При $x = 1$ получаем расходящийся эталонный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Пусть теперь $x = -1$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, так как

$0 < \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $n \geqslant 1$ $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. С другой стороны, это ряд абсолютной сходимостью не обладает, так как ряд из модулей его общих членов совпадает с рассмотренным выше эталонным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Таким образом, для исходного ряда: интервал сходимости $(-1, 1)$; область абсолютной сходимости $(-1, 1)$; область сходимости $[-1, 1)$.

5.3. Разложение функций в степенные ряды. Постановка задачи связана с представлением функции $f(x)$ в виде степенного ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ и установлением значений x, при которых такое представление имеет место. В частности, **рядом Маклорена** называется разложение функции по степеням x вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Такое представление иногда называют **разложением функции в степенной ряд в окрестности нуля.** Известны следующие разложения в ряд Маклорена:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots, \quad u \in \mathbb{R};$$

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \dots, \quad u \in \mathbb{R};$$

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!!} = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n u^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \dots, \quad u \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n} + \dots, \quad u \in (-1, 1];$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1) u^n}{n!} =$$

$$= 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)u^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u^3}{3!} + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots (\alpha-n+1) u^n}{n!} + \dots, \quad u \in (-1, 1).$$

Пример 5.12. Разложить $f(x) = \ln(5 + x)$ в ряд по степеням x.

Решение. Чтобы получить выражение $\ln(1 + u)$, где u будет лежать в окрестности нуля (т.е. $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$), преобразуем функцию, используя свойствами логарифмов: $f(x) = \ln\bigl(5(1 + x/5)\bigr) = \ln 5 + \ln(1 + (x/5)) = \ln 5 + \ln(1 + u)$, где $u = x/5$. Применим теперь известное разложение:

$$\ln 5 + \ln(1 + u) = \ln 5 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n} + \dots,$$

причем $u \in (-1, 1]$. Учитывая, что $u = x/5$, получаем:

$$f(x) = \ln 5 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{25 \cdot 2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{5^n \cdot n} + \dots,$$

где $x/5 \in (-1, 1]$ или $x \in (-5, 5]$.

Пример 5.13. Разложить $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$ в ряд по степеням x.

Решение. Чтобы получить выражение $(1 + u)^\alpha$, где $u \to 0$ при $x \to 0$, проведем замену: $u = -x$. Заметим, что в рассматриваемом случае $\alpha = 1/3$, воспользуемся разложением для степенной функции $(1 + u)^\alpha$ и затем проведем обратную замену, как при решении примера 5.10:

$$f(x) = (1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)u^2}{2} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)u^3}{6} + \dots$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{3}-n+1)u^n}{n!} + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})u^2}{2} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})u^3}{6} + \dots + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})\cdot\ldots\cdot(-\frac{3n-4}{3})u^n}{n!} + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}u + \frac{(-1)^1 2\cdot u^2}{3^2\cdot 2} + \frac{(-1)^2\cdot 2\cdot 5\cdot u^3}{3^3\cdot 6} + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)u^n}{3^n\cdot n!} + \dots =$$
$$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{(-1)^1\cdot 2\cdot(-1)^2x^2}{3^2\cdot 2} + \frac{(-1)^2\cdot 2\cdot 5\cdot(-1)^3x^3}{3^3\cdot 6} + \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)(-1)^n x^n}{3^n\cdot n!} + \dots =$$
$$= 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{3^2\cdot 2} - \frac{2\cdot 5\cdot x^3}{3^3\cdot 6} - \dots - \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)x^n}{3^n\cdot n!} + \dots$$

Остается заметить, что, так как $u \in (-1, 1)$, то $-x \in (-1, 1)$ и $x \in (-1, 1)$.

Пример 5.14.Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$ в ряд по степеням x.

Решение. Рассматриваемая функция — степенная, причем $\alpha = -2$. Как и ранее, подготовим функцию к применению известного разложения:

$$f(x) = \frac{1}{(2(1-x/2))^2} = \frac{1}{4(1-x/2)^2} = \frac{1}{4}(1+u)^{-2}, \quad u = -x/2.$$

Тогда:

$$\frac{1}{4}(1+u)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1 - 2u + \frac{(-2)(-3)u^2}{2} + \frac{(-2)(-3)(-4)u^3}{6} + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-2)(-3)(-4)\dots(-2-n+1)u^n}{n!} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + \dots + (-1)^n(n+1)u^n + \dots\right).$$

Заменяя, как выше, u на $-x/2$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2(-x/2) + 3(-x/2)^2 - 4(-x/2)^3 + \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^n(n+1)(-x/2)^n + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + x + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{8} + \dots + \frac{(n-1)x^n}{2^n} + \dots\right).$$

Остается учесть, что $u \in (-1, 1)$, следовательно, $-x/2 \in (-1, 1)$ и $x \in (-2, 2)$.

Литература

1. Налбандян Ю.С., Подпорин В.П. Развернутая программа по математическому анализу. Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ. 1997.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука. 1975 (и более поздние издания).

3. Абанин А.В., Епифанов О.В., Подпорин В.П. Определенный интеграл, функции многих переменных, ряды, дифференциальные уравнения. Методические указания по курсу математического анализа для студентов ОЗО экономического факультета. ПЛ РГУ, 1991.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987 (и более поздние издания).

5. Высшая математика для экономистов: для вузов. Под ред. Н.Ш.Кремера. М.: Банки и Биржи, ЮНИТИ. 1998.

6. Налбандян Ю.С., Спинко Л.И. "Контрольные задания по математическому анализу. Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ. Часть I". Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1999.

7. Налбандян Ю.С., Спинко Л.И. "Контрольные задания по математическому анализу. Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ. Часть III". Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2000.