МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.С.НАЛБАНДЯН, Л.И.СПИНКО

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ.

Часть I

Ростов-на-Дону, 1999

.

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Данные методические указания предназначены для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ и включают контрольные задания по темам, изучаемым в курсе математического анализа в I семестре. В пособии приводятся также примеры решения задач и список рекомендуемой литературы.

Методические указания печатаются в соответствии с решением кафедры математического анализа Ростовского государственного университета, протокол N 2 от 5 октября 1998 года.

Содержание

Введение (общие методические указания)

Учебный план заочного отделения экономфака РГУ предполагает выполнение студентами двух контрольных работ по математическому анализу (по одной в течение 1-го и 2-го семестров). Выбор варианта определяется преподавателем, читающим курс, а сроки сдачи работ — методистом.

Данные методические указания посвящены темам, изучаемым в первом семестре и состоят из двух частей. В первой приводятся решения типовых задач по всем изучаемым разделам математического анализа (подробную программу курса, список рекомендованной литературы и задачи для закрепления материала студент может найти в пособии [1], составляющем единое целое с этой разработкой). Вторая часть представляет собой задания для первой контрольной работы. Таких заданий 16, каждое включает в себя 30 задач. Студент должен решить те задачи из каждого задания, номер которых совпадает с номером варианта, предложенного ему преподавателем (например, получивший вариант N 2, решает задачи I.2, II.2, III.2 и т.д., где первое число указывает номер задания, а второе — номер задачи).

Замечание. Как программа курса, так и объем контрольной работы могут уточняться преподавателем.

Каждую контрольную работу рекомендуется выполнять поэтапно, по мере изучения соответствующего теоретического материала и разбора рекомендованных задач (см. [1]). Если у студента возникают какие-либо затруднения, следует обратиться к преподавателю для получения устной (во время работы консультпункта) или письменной консультации. При этом обязательно привести свой предполагаемый план решения и указать, какой момент вызывает сомнения.

При оформлении задания следует соблюдать следующие правила:

1) работа выполняется чернилами, в тетради, с соблюдением полей для замечаний проверяющего;

2) при формулировке условия задачи указываются конкретные данные своего варианта, например, задание I.4 формулируется следующим образом: "Найти, не пользуясь правилом Лопиталя, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^3+8}$";

3) задачи располагаются в порядке номеров заданий, решения и пояснения к ним излагаются подробно, аккуратно, без сокращения слов.

При получении проверенной работы студент должен исправить все отмеченные в ней ошибки и недочеты (даже в том случае, если работа зачтена). Если работа не зачтена, то все задачи, указанные проверяющим, должны быть решены заново, а исправленная работа (вместе с незачтенной) должна быть сдана на проверку в кратчайшие сроки (указанные методистом). Все работы предъявляются на экзамене.

1. Рекомендации к решению примеров

1.1. Вычисление пределов. Вычисление пределов без использования правила Лопиталя основано на использовании основных теорем об арифметических действиях с пределами функций, свойств бесконечно малых и бесконечно больших функций, а также известных замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{1}$$

Следует также учитывать теорему о пределе сложной функции. В частности, в силу этого утверждения

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1 \text{ и } \lim_{x\to a}(1+u(x))^{1/u(x)}=e, \text{ если при этом } u(x)\to 0. \tag{1'}$$

Обращаем внимание на следующие факты и рекомендации. Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=A, \quad \lim_{x\to a}g(x)=B.$$

При вычислении предела *алгебраической суммы функций* возможны ситуации:

1) A и B — конечные числа, тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$ (по теореме о пределе алгебраической суммы);

2) если один из пределов (A или B) конечен, а другой является одним из бесконечных символов, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\infty$ (в силу свойств бесконечно больших функций);

3) в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие одного знака, то ничего конкретного сказать нельзя; такая ситуация называется **неопределенностью вида** $\infty-\infty$ и требует дополнительного исследования.

Вычисляя предел *произведения функций*, учитываем следующее:

1) если A и B — конечные числа, тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$ (по теореме о пределе произведения);

2) если один из пределов (A или B) конечен и отличен от нуля, а другой является одним из бесконечных символов, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\infty$ (в силу свойств бесконечно больших функций);

3) если один из пределов равен нулю, а второй является одним из бесконечных символов, то говорят о **неопределенности вида** $\infty \cdot 0$.

Наконец, при вычислении *пределов частного* имеем:

1) если A и B — конечные числа, причем $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$ (по теореме о пределе частного);

2) если A и B - конечные числа, $A \neq 0$, $B = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ (поскольку $f(x)$ отграничена от нуля, $1/g(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$ и остается воспользоваться свойствами бесконечно больших функций);

3) если $A = \infty$, а B — любое конечное число, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$, а если $B = \infty$ и A — любое конечное число, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$ (в силу свойств бесконечно больших функций);

4) наконец, если $A = B = 0$, то говорят о **неопределенности вида** $0/0$**,**а если A и B — бесконечные символы — то **о неопределенности** ∞/∞**.**

При вычислении пределов **показательно–степенных функций,** т.е. функций вида $u(x)^{v(x)}$, возникают и другие виды неопределенностей (1^{∞}, ∞^0, 0^0), однако "основными" являются ситуации типа $0/0$ и ∞/∞, так как "раскрытие" остальных сводится именно к ним.

Раскрытие неопределенностей вида ∞/∞**.** Если числитель и знаменатель состоят из суммы не эквивалентных слагаемых, то рекомендуется вынести за скобки то слагаемое, которое растет быстрее других (для многочленов, в частности, это означает вынесение слагаемого, имеющего старшую степень). В результате сумма представляется в виде произведения бесконечно большой функции на функцию, имеющую конечный и отличный от нуля предел.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 3n - 4}{\sqrt{n^4+1}+2}$.

Решение. Предел последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции. Очевидно, что при $n \to \infty$ $\sqrt{n^4+1}+2 \to \infty$ и $n^2 - 3n - 4 \to \infty$ (в силу свойств бесконечно больших последовательностей), поэтому получили неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Проведем следующие преобразования:

$$\sqrt{n^4+1}+2 = \sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}+2 = n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+2 == n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{2}{n^2});$$

$$n^2 - 3n - 4 = n^2(1 - \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}).$$

Таким образом, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n-4}{\sqrt{n^4+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2})}{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{2}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{2}{n^2}}=1.$$

Последнее равенство верно в силу теорем о пределе суммы и частного функций с учетом того, что при $n\to\infty$ $\dfrac{4}{n^2}\to 0$, $\dfrac{3}{n}\to 0$, $\dfrac{1}{n^4}\to 0$ и $\dfrac{2}{n^2}\to 0$ по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$. Неопределенности такого вида возникают, как правило, либо при исследовании разности двух дробей (в этом случае рекомендуется приводить дроби к общему знаменателю), либо при рассмотрении разности иррациональных выражений (для избавления от иррациональностей следует преобразовать исходное выражение либо к разности квадратов, либо к сумме или разности кубов). Далее задача сводится к рассмотренной выше неопределенности вида ∞/∞.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^4+n^3}-\sqrt[3]{n^4-n^3})$.

Решение. В данном случае, чтобы раскрыть неопределенность $\infty-\infty$, необходимо воспользоваться формулой "разности кубов": $a^3-b^3=a^2+ab+b^2$. Для этого умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженный ему трехчлен вида

$$\sqrt[3]{(n^4+n^3)^2}+\sqrt[3]{n^4+n^3}\,\sqrt[3]{n^4-n^3}+\sqrt[3]{(n^4-n^3)^2}.$$

В результате в знаменателе останется именно этот трехчлен, а в числителе появится разность подкоренных выражений. Далее с возникшей неопределенностью вида ∞/∞ поступим так, как при решении примера 1:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^4+n^3}-\sqrt[3]{n^4-n^3})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{\sqrt[3]{(n^4+n^3)^2}+\sqrt[3]{n^4+n^3}\,\sqrt[3]{n^4-n^3}+\sqrt[3]{(n^4-n^3)^2}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^{8/3}(\sqrt[3]{(1+1/n)^2}+\sqrt[3]{1+1/n}\,\sqrt[3]{1-1/n}+\sqrt[3]{(1-1/n)^2}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}n^{1/3}\frac{n^{1/3}}{\sqrt[3]{(1+3/n^4)^2}+\sqrt[3]{1+3/n^4}\,\sqrt[3]{2+3/n^4}+\sqrt[3]{(1+3/n^4)^2}}=\infty.$$

Справедливость последнего равенства вытекает из случая 2) для вычисления предела произведения, так как $n^{1/3} \to \infty$ при $n \to \infty$, а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n}\sqrt[3]{1-1/n} + \sqrt[3]{(1-1/n)^2}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Замечание. Возможны и другие ситуации. Если, например, $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими, но не эквивалентными функциями при $x \to a$, то рекомендуется вынести за скобку функцию, растущую быстрее (тогда разность $f(x) - g(x)$, стоящая под знаком предела, представляется в виде произведения бесконечно большой при $x \to a$ функции на функцию, имеющую конечный и отличный от нуля предел). Если же $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то после вынесения за скобку любой из функций возникает неопределенность $\infty \cdot 0$, которая сводится к ситуациям $0/0$ или ∞/∞.

Раскрытие неопределенностей вида $0/0$. Основная цель при проведении преобразований — выделить в числителе и знаменателе множители вида $x-a$ (именно они при вычислении предела при $x \to a$ "обеспечивают" наличие неопределенности).

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+3x-18}$.

Решение. Подставляя предельное значение $x = 3$ в числитель и знаменатель, получаем, что оба выражения обращаются при этом в нуль. Стоящие в числителе и знаменателе многочлены можно разложить на множители, причем в числителе достаточно воспользоваться формулой разности квадратов, а в знаменателе необходимо предварительно найти корни соответствующего уравнения ($x^2 + 3x - 18 = 0$). Таким образом, имеем:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+3x-18} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+6)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3},$$

так как при $x \to 3$ $x+3 \to 6$ и $x+6 \to 9$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-5x+2}$.

Решение. Подставляя предельное значение $x = 2$ в числитель и знаменатель, получаем, что оба выражения обращаются при этом в нуль. Знаменатель, как и в примере 3, представляет собой многочлен. Так как $x = 2$ и $x = 1/2$ – корни соответствующего квадратного уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$, получаем: $2x^2-5x+2=2(x-2)(x-1/2)=(x-2)(2x-1)$. Для преобразования числителя (избавления от иррациональности) умножим и разделим соответствующее выражение на его сопряженное, чтобы применить формулу разности квадратов (сопряженным к $a-b$ является выражение $a+b$): $\sqrt{x+2}-2=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$. Далее имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=1/12.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(3x+6)}{x^3+8}$.

Решение. Очевидно, что при $x=-2$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. При преобразовании знаменателя воспользуемся формулой суммы кубов. Далее, поскольку $3x+6\to 0$ при $x\to -2$, можем применить первый из замечательных пределов $(1')$. Итак, имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(3x+6)}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{\sin 3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}3\frac{\sin 3(x+2)}{3(x+2)}\frac{1}{(x^2-2x+4)}=3\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Замечание. Вместо "конструирования" нужного замечательного предела можно использовать теорему об эквивалентных функциях, согласно которой в произведении и в частном функции можно заменять на эквивалентные. Имеют место следующие "цепочки" эквивалентных функций":

$$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\quad\text{при }\ x\to 0;$$
$$u(x)\sim\sin u(x)\sim tgu(x)\sim\arcsin u(x)\sim arctgu(x)\sim\ln(1+u(x))\sim e^{u(x)}-1$$
$$\text{при}\quad x\to a\quad\text{и}\quad u(x)\to 0.$$

В частности, решение примера 5 при этом принимает следующий вид:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(3x+6)}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{3}{x^2-2x+4}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 3x-\sin 19x)\arcsin 2x}{1-\cos x}$.

Решение. При $x=0$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Так как $2x\to 0$ при $x\to 0$, множитель $\arcsin 2x$ можно заменить эквивалентным ему выражением $2x$. Поскольку в разности $\sin 3x-\sin 19x$ так поступить нельзя, воспользуемся известной тригонометрической формулой разности синусов. Проводя одновременно преобразования и в знаменателе, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x-\sin 19x)\arcsin 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2\sin 8x\cos 11x)2x}{2\sin^2(x/2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cdot 8x^2\cdot\cos 11x}{2\cdot(x^2/4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-32\cos 11x}{1/2}=-64.$$

Вычисление пределов показательно–степенных функций. При вычислении таких пределов прежде всего рекомендуется, используя основное логарифмическое тождество, представить исходную функцию в виде показательной: $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)^{g(x)}\big)=\lim\limits_{x\to a}e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}$. Далее могут возникнуть следующие случаи:

1) если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)=A$ конечен, то в силу теоремы о пределе сложной функции $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)^{g(x)}\big)=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)}=e^A$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)=A=\infty$, то, учитывая поведение показательной функции, получаем, что при $A=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)^{g(x)}\big)=+\infty$, а если $A=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)^{g(x)}\big)=0$.

Замечание. Может оказаться полезным также следующее утверждение: $\ln v(x)\sim v(x)-1$ при $x\to a$, если $v(x)\to 1$ при $x\to a$.

Пример 7. Вычислить: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-3}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n)^{n^2}$.

Решение. а) Прежде всего, перейдем к показательной функции:

$$\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^n=e^{n\ln\frac{n+1}{n-3}}.$$

Заметим, что $\dfrac{n+1}{n-3}=\dfrac{n(1+1/n)}{n(1-3/n)}\to 1$ при $n\to\infty$ и вычислим предел показателя, используя эквивалентность из предшествующего Замечания:

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n-3}=\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{n+1}{n-3}-1\Big)=\lim_{n\to\infty}n\frac{n+1-n+3}{n(1-3/n)}=4.$$

Так как предел показателя существует и конечен, то в силу случая 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-3}\right)^n = e^4$.

b) На первом этапе преобразований имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(2+1/n)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln(2+1/n)}.$$

Очевидно, что при $n\to\infty$ $\ln(2+1/n)\to\ln 2>0$. Но тогда и $n^2\ln(2+1/n)\to+\infty$ при $n\to\infty$. В силу случая 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n)^{n^2}=+\infty$.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{1/(x+1)}$.

Решение. Переходя к показательной функции, имеем:

$$\lim_{x\to-1}(3+2x)^{1/(x+1)} = \lim_{x\to-1} e^{\frac{\ln(3+2x)}{x+1}}.$$

При $x\to-1$ $3+2x\to 1$, поэтому

$$\lim_{x\to-1}\frac{\ln(3+2x)}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{3+2x-1}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)}{x+1} = 2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{1/(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln(3x+2)}{x+1}} = e^2$.

1.2. Исследование функций на непрерывность, классификация точек разрыва. Решение задач этого раздела опирается на свойства основных элементарных функций, на теоремы об арифметических операциях с непрерывными функциями, а также на определения устранимых точек разрыва, точек разрыва 1–го и 2–го рода.

Пример 9. Определить, где функции непрерывны, найти точки разрыва и их классифицировать: a) $f_1(x)=\dfrac{|x+6|}{x^2-36}$; b) $f_2(x)=sign(x-5)$; c) $f_3(x)=\dfrac{\sin 2x}{x^2+x}$.

Решение. a) Рассмотрим функцию $f_1(x)$. Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, непрерывны при всех $x\in\mathbb{R}$. Однако знаменатель обращается в нуль при $x=-6$ и $x=6$, поэтому $f_1(x)$ непрерывна при $x\in\mathbb{R}$ и $x\neq 6$, $x\neq -6$ в силу теоремы о непрерывности частного. Для классификации предполагаемых точек разрыва ($x=-6$ и $x=6$) необходимо вычислять обычные или односторонние пределы. Так как $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{|x+6|}{x^2-36}=\infty$, точка $x = 6$ является точкой разрыва $f_1(x)$ 2–го рода. Рассмотрим $x = -6$. Так как при $x > -6$ $|x+6| = x+6$, а при $x < -6$ $|x+6| = -x-6$, о $\lim\limits_{x\to -6} f_1(x)$ говорить нельзя, и мы рассматриваем односторонние пределы при $x \to -6+0$ (т.е. когда $x \to -6$ и $x > -6$) и при $x \to -6-0$ (т.е. когда $x \to -6$ и $x < -6$):

$$\lim_{x\to -6+0} \frac{|x+6|}{x^2-36} = \lim_{x\to -6+0} \frac{x+6}{x^2-36} = \lim_{x\to -6+0} \frac{1}{x-6} = -1/12;$$

$$\lim_{x\to -6-0} \frac{|x+6|}{x^2-36} = \lim_{x\to -6-0} \frac{-x-6}{x^2-36} = \lim_{x\to 6+0} \frac{-1}{x-6} = 1/12.$$

Поскольку оба односторонних предела существуют, конечны, но различны между собой, $x = -6$ — точка разрыва $f_1(x)$ 1–го рода.

b) Рассмотрим функцию $f_2(x)$. Напомним, что $y = sign(x)$ — функция "знака", т.е. $sign(x) = 1$ при $x > 0$, $sign(x) = -1$ при $x < 0$ и $sign(x) = 0$ при $x = 0$. Соответственно, $f_2(x) = 1$ при $x > 5$, $f_2(x) = -1$ при $x < 5$ и $f_2(x) = 0$ при $x = 5$. Поэтому $f_2(x)$ непрерывна при всех $x \neq 5$. Для определения характера разрыва в так называемой "точке склейки" $x = 5$ находим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 5+0} f_2(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 5-0} f_2(x) = -1$. Поскольку оба односторонних предела существуют, конечны, но различны между собой, $x = 5$ — точка разрыва $f_2(x)$ 1–го рода.

c) Перейдем к функции $f_3(x)$. Как и в случае a), используя теорему о непрерывности частного двух функций, заключаем, что $f_3(x)$ непрерывна при всех действительных x, кроме $x = 0$ и $x = -1$ (в этих точках знаменатель обращается в нуль). Таким образом, $x = 0$ и $x = -1$ — точки разрыва. Для определения характера разрыва вычисляем пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x+1)} = 2; \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\sin 2x}{x^2+x} = \infty.$$

Очевидно, что $x = -1$ — точка разрыва $f_3(x)$ 2–го рода. Поскольку $f_3(x)$ не определена в точке $x = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, то $x = 0$ — устранимая точка разрыва $f_3(x)$.

1.3. Вычисление производных и дифференциалов. При решении используем таблицу производных элементарных функций, правила дифференцирования и теорему о производной сложной функции (рекомендуем переписать все формулы в таблице производных для этого случая, например, $\big(arctgu(x)\big)' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$).

Пример 10. Найти производную функции

$$f(x) = arcctg\big(\sqrt{3x^2-x+1} - \sin(2x)\big).$$

Решение. С помощью теоремы о производной сложной функции и теоремы о производной алгебраической суммы получаем:

$$f'(x) = \Big(arcctg\big(\sqrt{3x^2-1} - \sin(2x)\big)\Big)' = \frac{-\big(\sqrt{3x^2-1} - \sin(2x)\big)'}{1+\big(\sqrt{3x^2-1} - \sin(2x)\big)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{(3x^2-1)'}{2\sqrt{3x^2-1}} - \cos 2x\cdot(2x)'}{1+\big(\sqrt{3x^2-1} - \sin(2x)\big)^2} = -\frac{6x - 4\cos 2x\cdot\sqrt{3x^2-x-1}}{2\sqrt{3x^2-1}\Big(1+\big(\sqrt{3x^2-1} - \sin(2x)\big)^2\Big)}.$$

Заметим, что дробь в последнем выражении можно еще преобразовывать.

Пример 11. Найти дифференциал функции $f(x) = 2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ в точке $x = \pi/2$.

Решение. Известно, что $df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$. Прежде всего найдем $f'(x)$, используя табличные формулы и теоремы о производной частного и алгебраической суммы:

$$f'(x) = \Big(2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\Big)' = 2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln 2\cdot\Big(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\Big)' =$$

$$= 2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln 2\cdot\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1+\cos x)'(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= 2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln 2\cdot\frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = 2^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln 2\cdot\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Подставим в найденное выражение $x = \pi/2$: $f'(\pi/2) = 2^1\ln 2\frac{2}{(1+0)^2} = 4\ln 2$.

Окончательно $df|_{x=\pi/2} = 4\ln 2dx$

Пример 12. Найти $f''(3/5)$, если $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Заметим, что $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$. Поэтому найдем $f'(x)$, упростим полученное выражение и еще раз продифференцируем. Итак,

$$f'(x) = \Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$f''(x) = \left((1-x^2)^{-3/2}\right)' = -\frac{3(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^5}} = \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Подставляя $x = 3/5$, окончательно получаем: $f''(3/5) = \dfrac{9\cdot 5^5}{4^6}$

1.4. Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя. Правило Лопиталя непосредственно используется для раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞. Случаи $\infty - \infty$ и $0\cdot\infty$ предварительно нужно свести к отмеченным выше.

Пример 13. Найти с помощью правила Лопиталя:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x) - 2\sin x + x^2}{arctg^3 x};\quad b)\ \lim_{x\to+0}\sin x\ln(ctgx)\quad c)\ \lim_{x\to+0}(ctgx - \frac{1}{x}).$$

Решение. а) При подстановке $x = 0$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль. Функции, стоящие в числителе и знаменателе дифференцируемы при всех $x \in \mathbb{R}$. Согласно правилу Лопиталя, если в этом случае существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то значение этого предела совпадает со значением $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Предварительно упростим исходную функцию, заменив знаменатель $arctg^3 x$ на эквивалентное ему при $x\to 0$ выражение x^3. Итак:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x) - 2\sin x + x^2}{arctg^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x) - 2\sin x + x^2}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln(1+x) - 2\sin x + x^2)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x+1} - 2\cos x + 2x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{2}{x+1} - 2\cos x + 2x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(x+1)^2} + 2\sin x + 2}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{-2}{(x+1)^2} + 2\sin x + 2)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{(-2)(-2)}{(x+1)^3} + 2\cos x}{6} = 1$$

Замечание. При решении правило Лопиталя применялось трижды. При этом при каждом его применении необходимо проверять выполнение всех условий (дифференцируемость стоящих в числителе и знаменателе функций, одновременное их обращение в нуль или в бесконечность, существование предела отношения производных).

b) Приступая к вычислению, замечаем, что при $x \to +0$ $\sin x \to 0$ и $\ln(ctgx) \to +\infty$, т.е. возникает неопределенность $0 \cdot \infty$. Функцию $\sin x$ при $x \to 0$ можно заменить эквивалентным ей выражением x. Учитывая, что функция, обратная к бесконечно малой функции, является бесконечно большой, и наоборот, мы можем свести задачу к раскрытию неопределенности $0/0$ либо ∞/∞. Для этого достаточно воспользоваться очевидным тождеством $f(x) = \dfrac{1}{1/f(x)}$, учитывая, что выражение $1/f(x)$ должно быть удобным для дифференцирования. В рассматриваемом случае в качестве $f(x)$ целесообразно выбрать x. Получаем:

$$\lim_{x\to+0} \sin x \ln(ctgx) = \lim_{x\to+0} x \ln(ctgx) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(ctgx)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{(\ln(ctgx))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{-1/\sin^2 x}{ctgx}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0} \frac{x^2}{\sin^2 x \cdot ctgx} = 0$$

(вначале применили правило Лопиталя, а затем — первый предел из (1)).

c) При $x \to +0$ функция $1/x$ является положительной бесконечно большой (по теореме о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями). Кроме того, $ctgx \to +\infty$ при $x \to +0$, поэтому в рассматриваемом выражении возникла неопределенность вида $\infty - \infty$. Чтобы ее раскрыть, приведем дроби к общему знаменателю: $\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$. Учитывая эквивалентность при $x \to 0$ функций $\sin x$ и x и применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to+0}(ctgx - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to+0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to+0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = -\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{2} = 0.$$

1.5. Приложение производных к исследованию функций. Задачи этого раздела связаны с определением интервалов монотонности функции, установлением направлений выпуклости ее графика, а также с построением эскиза графика функции. Полное исследование функции проводится по следующему плану.

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Определить координаты точек пересечения графика функции с осями координат (для нахождения точки пересечения графика с осью OX решаем уравнение $f(x) = 0$; для нахождения точки пересечения графика с осью OY подставляем в аналитическое выражение функции значение $x = 0$).

3. Проверить наличие у исследуемой функции дополнительных свойств (четность, нечетность, периодичность). В случае, если, например, функция является нечетной (четной), достаточно проводить исследования и строить эскиз графика при $x \geqslant 0$ с последующим симметричным его отображением (относительно начала координат — для нечетной функции или относительно оси OY — для четной).

4. Определить, где функция $f(x)$ является непрерывной; установить точки разрыва; найти в этих точках и на концах интервалов, составляющих область определения функции, односторонние пределы.

5. Найти первую производную $f(x)$, с ее помощью определить интервалы монотонности функции и найти точки экстремума.

6. Найти вторую производную $f(x)$, с ее помощью определить направления выпуклости графика функции и найти точки перегиба.

7. При необходимости найти асимптоты графика. В частности, если $x = a$ — точка разрыва $f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$), то $x = a$ — уравнение вертикальной правосторонней (левосторонней) асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где k и b находятся по формулам

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} (\neq \infty); \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{2}$$

В некоторых случаях пределы в (2) приходится вычислять отдельно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

8. Собрать всю информацию и построить эскиз графика.

Пример 14. Определить интервалы монотонности функции $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$, найти точки экстремума.

Решение. Прежде всего заметим, что областью определения данной функции является все множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Характер монотонности функции на интервале (a, b) связан со знаком ее производной на этом интервале, а точками экстремума могут быть точки, в которых производная функции обращается в нуль (*стационарные точки*) или не существует (*критические точки*). Поэтому находим $f'(x)$, используя теорему о дифференцировании произведения:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{3(x-1)+x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Очевидно, что $f'(x)$ обращается в нуль при $x = 3/4$, а при $x = 1$ не существует. Эти точки являются подозрительными на экстремум. Чтобы установить наличие в них экстремального значения функции, а также определить характер монотонности, проверяем знак $f'(x)$ на интервалах $(-\infty, 3/4)$, $(3/4, 1)$, $(1, +\infty)$. Для этого достаточно определить знак $f'(x)$ для одной из точек в каждом рассматриваемом интервале. В данном случае легко убедиться в том, что $f'(x) > 0$ при $x \in (3/4, 1) \cup (1, +\infty)$ (так как $f'(4/5) = 1/(3\sqrt[3]{5})$, $f'(2) = 5/3$), и $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 3/4)$, так как $f'(0) = -1$. В силу первого из достаточных условий экстремума $x = 3/4$ — точка минимума функции $f(x)$ (так как производная при переходе через эту точку меняет знак с " $-$ " на " $+$ "), причем $f(3/4) = \dfrac{-3}{4\sqrt[3]{4}}$. $x = 1$ точкой экстремума не является. Функция $f(x)$ возрастает на интервале $(3/4, +\infty)$ и убывает на $(-\infty, 3/4)$.

Пример 15. Определить направления выпуклости графика функции $f(x) = x^2 e^{-3x}$, найти точки перегиба.

Решение. Очевидно, что областью определения являются рассматриваемой функции является все множество действительных чисел. Направление выпуклости графика функции $f(x)$ на интервале (a, b) связано со знаком ее второй производной на этом интервале. Точками перегиба могут быть точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует. Поэтому находим $f''(x)$:

$$f'(x) = 2xe^{-3x} + x^2(-3e^{-3x}) = (2x - 3x^2)e^{-3x};$$

$$f''(x) = \left((2x - 3x^2)e^{-3x}\right)' = (9x^2 - 12x + 2)e^{-3x}.$$

Очевидно, что $f''(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и обращается в нуль в точках, для которых $9x^2 - 12x + 2 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим его корни: $x_1 = (2-\sqrt{2})/3$, $x_2 = (2+\sqrt{2})/3$. Определяем знак $f''(x)$ на соответствующих интервалах (подставляя промежуточные значения) и получаем, что на интервалах $(-\infty, (2-\sqrt{2})/3)$ и $((2+\sqrt{2})/3, +\infty)$ $f''(x) > 0$ (следовательно, график функции является выпуклым вниз), а на $((2-\sqrt{2})/3, (2+\sqrt{2})/3)$ $f''(x) < 0$ (т.е. график функции является выпуклым вверх). Точки x_1 и x_2 — точки перегиба.

Пример 16. Провести полное исследование и построить эскизы графиков функций: a) $f(x) = x^2 e^{-3x}$; b) $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Рассмотрим по плану функцию a).

1. В силу свойств показательной функции и многочлена $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

2. Так как $f(-x) = (-x)^2 e^{3x} = x^2 e^{3x}$, свойством четности или нечетности функция не обладает, как и свойством периодичности.

3. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим, что график функции $f(x)$ пересекается с обеими осями координат в точке (0.0).

4. Также в силу свойств показательной функции и многочлена $f(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому точек разрыва нет (следовательно, график не имеет вертикальных асимптот).

5. При решении примера 15 была найдена первая производная функции $f'(x) = (2x - 3x^2)e^{-3x}$, которая существует при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ и обращается в нуль, если $2x - 3x^2 = 0$, т.е. когда $x = 0$ или $x = 2/3$. Стоит заметить, что при всех $x \in \mathbb{R}$ $e^{-3x} > 0$, поэтому знак $f'(x)$ определяется только знаком первого множителя. Подставляя промежуточные значения, устанавливаем, что $f'(x) > 0$ при $x \in (0, 2/3)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (2/3, +\infty)$. Таким образом, $f(x) = x^2 e^{-3x}$ возрастает на $(0, 2/3)$ и убывает на $(-\infty, 0)$ и $(2/3, +\infty)$. Точка $x = 0$ является точкой минимума (при этом $f(0) = 0$), а $x = 2/3$ — точкой максимума ($f(2/3) = 4e^{-2}/9$).

6. Воспользуемся результатом, полученным при решении примера 15. Было показано, что на интервалах $(-\infty, (2-\sqrt{2})/3)$ и $((2+\sqrt{2})/3, +\infty)$ график функции является выпуклым вниз), а на $((2-\sqrt{2})/3, (2+\sqrt{2})/3)$ график функции является выпуклым вверх. Точки $x = (2-\sqrt{2})/3$ и $x = (2+\sqrt{2})/3$ — точки перегиба.

7. Так как в силу свойств показательной функции не существует предела e^{-3x} при $x \to \infty$, рассмотрим пределы из (2) при $x \to \pm\infty$. Так как $e^{-3x} \to= +\infty$ при $x \to -\infty$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-3x} = +\infty$ и, следовательно, график не имеет асимптоты при $x \to -\infty$. Далее,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{3x}} = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = 0 = b$$

и $y = 0$ — уравнение асимптоты (в данном случае — горизонтальной).

8. Эскиз графика функции приведен на рис. 1 (на стр. 18)

Рассмотрим теперь функцию из b): $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

1. Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(-x) = (-x)\sqrt[3]{-x-1} = x\sqrt[3]{x+1}$, следовательно,свойством четности или нечетности функция не обладает, как и свойством периодичности.

3. Если $x = 0$, то $y = f(0) = 0$, поэтому график функции пересекает ось OY в точке $(0,0)$ (очевидно, что это - и точка пересечения графика с осью OX). Решив уравнение $x\sqrt[3]{x-1} = 0$, находим,что график функции пересекает ось OX также в точке $(1,0)$.

4. $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому точек разрыва нет (следовательно, график не имеет вертикальных асимптот).

5. При решении примера 14 была найдена первая производная функции $f'(x) = \frac{4x-3}{3(x-1)^{2/3}}$, которая обращается в нуль при $x = 3/4$. Производная функции не определена в точке, обращающей в нуль знаменатель, т.е. при $x = 1$. Также при решении примера 14 установлено, что $x = 3/4$ — точка минимума функции $f(x)$, причем $f(3/4) = \dfrac{-3}{4\sqrt[3]{4}}$; $x = 1$ точкой экстремума не является; функция $f(x)$ возрастает на интервале $(3/4, +\infty)$ и убывает на $(-\infty, 3/4)$.

6. Найдем вторую производную функции:

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{4x-3}{(x-1)^{2/3}}\right)' = \frac{4(x-1)^{2/3} - (4x-3)\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}}{3(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \frac{4(x-1)^{2/3} - \frac{2(4x-3)}{3(x-1)^{1/3}}}{3(x-1)^{4/3}} = \frac{12(x-1) - 2(4x-3)}{9(x-1)^{5/3}} = \frac{4x-6}{9(x-1)^{5/3}}.$$

Направление выпуклости графика может измениться при переходе через точки $x = 3/2$ (т.к. $f''(3/2) = 0$) и $x = 1$ (т.к. в этой точке вторая производная функции не определена). Действительно, при $x \in (1, 3/2)$ $f''(x) < 0$ (график выпукл вверх), а при $x \in (-\infty, 1)$ и $x \in (3/2, +\infty)$ $f''(x) > 0$ (график выпукл вниз). Обе рассмотренные точки являются точками перегиба.

7. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x-1} = \infty$, можно сделать вывод об отсутствии у функции наклонных асимптот.

8. Эскиз графика функции приведен на рис. 2.

1.6. Неопределенные интегралы. При решении примеров этого раздела необходимо знать таблицу интегралов, владеть основными методами интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям), а также использовать основные свойства неопределенного интеграла (в частности, его линейность). Полезной является также теорема о независимости интеграла от переменной, позволяющая вносить выражения под знак дифференциала. Еще одним методом является применение формулы интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3}$$

При этом наиболее распространены две ситуации.

1) Подынтегральная функция состоит из произведения двух элементарных функций, от каждой из которых интеграл легко вычисляется, например $\int e^{ax}x^n dx$, $\int x^n \cos axdx$, $\int x^n \sin axdx$, где $n \in \mathbb{N}$. В этом случае, выбирая в качестве дифференцируемой части степенную функцию (полагая $u = x^n$) и применяя формулу (8) n раз, можно прийти к интегралам, сводящимся к табличным.

2) Подынтегральная функция содержит логарифмическую или обратные тригонометрические функции (в таблице нет интегралов от таких функций!). При этом рекомендуется в качестве u выбирать именно эти выражения, что снова позволит прийти к интегралам, сводящимся к табличным.

Пример 17. Найти: a) $\int \dfrac{x^2\,dx}{3+x^6}$; b) $\int \dfrac{\cos^2(\ln x)\,dx}{x}$.

Решение. a). Анализируя подынтегральную функцию, замечаем, что $x^2dx = d(x^3/3)$, а $x^6 = (x^3)^2$. Осуществляем так называемое "внесение под знак дифференциала", учитывая свойства и дифференциала, и неопределенного интеграла:

$$\int \frac{x^2\,dx}{3+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{3+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(x^3/\sqrt{3}) + C$$

(использован табличный интеграл $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}arctg(u/a) + C$).

b). Поскольку $dx/x = d(\ln x)$, имеем:

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)\,dx}{x} = \int \cos^2(\ln x)\,d(\ln x) = \frac{1}{2}\int \big(1+\cos(2\ln x)\big)\,d(\ln x) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d(\ln x) + \frac{1}{2}\int \cos(2\ln x))d(2\ln x) = \frac{1}{2}\big(\ln x + \frac{1}{2}\sin(2\ln x)\big) + C$$

(при проведении преобразований использована первая формула из (8) - см. стр. 25).

Пример 18. Найти: a) $\int \lg(3x^2-1)dx$; b) $\int x^2\sin 2x dx$; c) $\int e^x \cos x\, dx$.

Решение. a) Полагаем: $u(x) = \lg(4x^2-1)$, $dv = dx$. Находим отсюда выражения, необходимые для использования формулы (3):

$$du = u'(x)dx = \frac{(4x^2-1)'}{(4x^2-1)\ln 10}dx = \frac{8x\,dx}{(4x^2-1)\ln 10}; \qquad v = \int dx = x.$$

В силу формулы (3)

$$\int \lg(4x^2-1)dx = x\lg(4x^2-1) - \frac{8}{\ln 10}\int x\frac{x\,dx}{4x^2-1} = x\lg(4x^2-1)-$$
$$-\frac{2}{\ln 10}\int\frac{4x^2dx}{4x^2-1} = x\lg(4x^2-1) - \frac{2}{\ln 10}\int\frac{4x^2-1+1}{4x^2-1}dx = x\lg(4x^2-1)-$$
$$-\frac{2}{\ln 10}\left(\int dx + \int\frac{1}{4x^2-1}dx\right) = x\lg(4x^2-1) - \frac{2}{\ln 10}\left(x - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-1/4}dx\right).$$

Применим теперь формулу $\int\frac{du}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$, учитывая, что в нашем случае $a^2 = 1/4$ и $a = 1/2$:

$$\int\frac{1}{x^2-1/4}dx = \frac{1}{2/2}\ln\left|\frac{1/2-x}{1/2+x}\right| + C = \ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int \lg(4x^2-1)dx = x\lg(4x^2-1) - \frac{2x}{\ln 10} + \frac{1}{2\ln 10}\ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| + C.$$

b) В этой ситуации полагаем $u = x^2$, $dv = \sin 2x$. Тогда $du = 2xdx$, $v = (-\cos 2x)/2$, и по формуле (3) $\int x^2\sin 2x dx = (-x^2\cos 2x)/2 + \int x\cos 2x dx$. Пусть теперь $u = x$, $dv = \cos 2x$, тогда $du = dx$, $v = (\sin 2x)/2$. Еще раз применяя (3), получаем:

$$\int x^2\sin 2x dx = \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x dx =$$
$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

c) В данном случае выбор u и v достаточно произволен, так как обе функции, входящие в подынтегральное выражение, дают табличные интегралы, а степенной функции среди их нет. Пусть $u(x) = e^x$ (тогда $du = e^x dx$) и $dv = \cos x dx$ ($v = \sin x$). Обозначая рассматриваемый интеграл через I, из (3) получаем:

$$I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx.$$

Далее повторно применим (3), полагая $u(x) = e^x$ ($du = e^x dx$) и $dv = \sin x dx$ ($v = -\cos x$):

$$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

Решая уравнение относительно I, получаем, что $I = \dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$ или окончательно

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Пример 19. Найти неопределенные интегралы от рациональных функций: a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{6-2x-x^2}\, dx$; b) $\displaystyle\int \frac{2x^4+x+1}{x^2-8x+20}\, dx$.

Решение. a) Под интегралом стоит правильная рациональная дробь, т.е. отношение многочленов, причем степень числителя меньше степени знаменателя (напомним, что степенью многочлена называется максимальная степень, в которую возводится величина x). Начнем решение с выделения полного квадрата в квадратном трехчлене, стоящем в знаменателе:

$$6 - 2x - x^2 = 6 - (2x + x^2) = 6 - (x^2 + 2x + 1 - 1) = 7 - (x+1)^2.$$

Полагаем $t = x + 1$, тогда $x = t - 1$, $dx = dt$ и

$$\int \frac{3x-2}{6-2x-x^2}\, dx = \int \frac{3(t-1)-2}{7-t^2}\, dt = \int \frac{3t-5}{7-t^2}\, dt = 3\int \frac{t\, dt}{7-t^2} -$$

$$-5\int \frac{dt}{7-t^2} = -\frac{3}{2}\int \frac{d(7-t^2)}{7-t^2} - 5\int \frac{dt}{7-t^2} == -\frac{3}{2}\ln(7-t^2) -$$

$$-5\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right) + C = -\frac{3}{2}\ln(6-2x-x^2) - \frac{5}{2\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}+1+x}{\sqrt{7}-1-x}\right) + C.$$

b) В данном примере подынтегральная функция рациональна, но не является правильной дробью, так как степень числителя равна 4, а степень знаменателя — 2. Поэтому необходимо выделить "целую часть", либо разделив числитель на знаменатель, либо проведя следующие преобразования:

$$\frac{2x^4+x+1}{x^2-8x+20}=\frac{2x^4-16x+16x+40-40+x+1}{x^2-8x+20}=$$
$$=\frac{2(x^4-8x+20)+17x-39}{x^2-8x+20}=2+\frac{17x-39}{x^2-8x+20}.$$

Итак,

$$\int\frac{2x^4+x+1}{x^2-8x+20}\,dx=2\int dx+\int\frac{17x-39}{x^2-8x+20}\,dx. \tag{4}$$

Далее, как в примере а), $x^2-8x+20=(x-4)^2-16+20$; полагаем $x-4=t$, тогда $dx=dt$, $x=t+4$. Для второго интеграла из (4) имеем:

$$\int\frac{17x-39}{x^2-8x+20}\,dx=\int\frac{17(t+4)-39}{t^2+4}\,dt=\frac{17}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+4}+29\int\frac{dt}{t^2+4}=$$
$$=\frac{17}{2}\ln(t^2+4)+\frac{29}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{17}{2}\ln(x^2-8x+20)+\frac{29}{2}arctg(\frac{x-4}{2})+C.$$

Окончательно

$$\int\frac{2x^4+x+1}{x^2-8x+20}\,dx=2x+\frac{17}{2}\ln(x^2-8x+20)+\frac{29}{2}arctg(\frac{x-4}{2})+C.$$

*Замечание.*В некоторых случаях оказывается полезной общая формула для выделения полного квадрата: $ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+(c-\frac{b^2}{4a})$.

Пример 20. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций: а) $\int\frac{x+2}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$; b) $\int\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{1-\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$.

Решение. а) Интегралы, в которых встречается квадратичная иррациональность, т.е. стоящий под квадратным корнем квадратный трехчлен, сводятся путем линейной замены к одному из табличных интегралов:

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin(u/a)+C \text{ или } \int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})+C.$$

Чтобы определить, какую замену производить, в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат (при этом полезно предварительно вынести коэффициент при x^2 за скобку), и новая переменная вводится по формуле $t = \sqrt{x} - b/2$. Для рассматриваемой функции получаем:

$3-6x-x^2 = 3-(6x+x^2) = 3-(x^2+6x+9-9) = 3-((x+3)^2-9) = 12-(x+3)^2.$

Поэтому $t = x+3$, $x = t-3$, $dt = dx$ и, подставляя в интеграл, получаем:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx = \int \frac{t-1}{\sqrt{12-t^2}}dt = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{12-t^2}} -$$
$$-\int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{\sqrt{12-t^2}} - \arcsin(t/\sqrt{12}) + C = -\sqrt{12-t^2} -$$
$$-\arcsin(t/\sqrt{12}) + C = -\sqrt{3-6x-x^2} - \arcsin((x+3)/\sqrt{12}) + C.$$

b) При интегрировании иррациональных функций более общего вида рекомендуются замены, которые позволят избавиться от иррациональности. В рассматриваемом случае полагаем $2x+1 = t^6$ (при этом $\sqrt[3]{2x+1} = t^2$, $\sqrt{2x+1} = t^3$). Очевидно, что $2dx = 6t^5dt$, $dx = 3t^5dt$. Полученную после замены рациональную функцию интегрируем с помощью методов, рассмотренных при решении примера 20. Итак, имеем:

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{1-\sqrt[3]{2x+1}}\,dx = 3\int \frac{t^3+t^2}{1-t^2}t^5dt = 3\int \frac{(t+1)t^7}{(1-t)(1+t)}dt =$$
$$= -3\int \frac{t^7-1+1}{t-1}dt = -3\int \bigl(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\bigr)dt =$$
$$= -3\bigl(t^7/7+t^6/6+t^5/5+t^4/4+t^3/3+t^2/2+t+\ln(t-1)\bigr)+C,$$
$$\text{где}\quad t = 2x+1.$$

Пример 22. Найти интегралы от тригонометрических функций:

$$a)\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx; \qquad b)\int \sin(15x)\cos(4x)dx; \qquad c)\int \sin^6 x\,dx.$$

Решение. При интегрировании тригонометрических функций полезно помнить, что $\sin x dx = -d(\cos x)$; $\cos x dx = d(\sin x)$. Кроме того, рекомендуется учитывать следующие формулы:

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \bigl(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\bigr)/2; \tag{5}$$
$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \bigl(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\bigr)/2; \tag{6}$$
$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \bigl(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\bigr)/2; \tag{7}$$
$$\sin^2(\alpha x) = \bigl(1-\cos(2\alpha x)\bigr)/2; \qquad \cos^2(\alpha x) = \bigl(1+\cos(2\alpha x)\bigr)/2. \tag{8}$$

a) Поскольку одна из тригонометрических функций возводится в нечетную степень, "отщепим" одну степень этой функции и, проводя преобразования с учетом основного тригонометрического тождества, получим:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$
$$= \int (\sin^4 x - \sin^6 x)d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

b) В данном случае с помощью формулы (7) имеем:

$$\int \sin(15x)\cos(4x)dx = \frac{1}{2}\int \big(\sin(19x)+\sin(11x)\big)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(19x)}{19} + \frac{\cos(11x)}{11}\right) + C.$$

c) Будем применять формулы (8), чтобы "понижать" степень интегрируемых выражений:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{2}\int \big(1-\cos(2x)\big)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{2^3}\int \big(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\big)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + \frac{3}{2}\big(1+\cos(4x)\big) - \cos^2 x \cos x\right)dx =$$
$$= \frac{5}{4}\int dx - \frac{3}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{3}{4}\int \cos(4x)dx - \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$
$$= \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}\sin(2x) + \frac{3}{16}\sin(4x) - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}\sin^3 x + C.$$

2. Задания для контрольных работ

I. Найти, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+5x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-7x-4}{\sqrt{x}-2}$

4) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^3+8}$

5) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+7x+10}$

6) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-4}{x^2-5x}$

7) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64}$

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x^3+2x}$

10) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{x+5}}{x^2-16}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+3x^3+x^2}-2}{x^4-x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-3x-4}$

13) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-27}$

14) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+27}$

15) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{1-\sqrt{x+5}}{2x^2+9x+4}$

16) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{8-x^3}$

17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{2x^2+5x-7}$

18) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{49-x^2}$

19) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

20) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$

21) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$

22) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

23) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2+x-6}$

24) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$

25) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{2-\sqrt{9+x}}{2x^2+9x-5}$

26) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$

27) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{4-\sqrt{2x-2}}{x^2-5x-36}$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2-x}$

29) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

30) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-x}.$

II. Вычислить, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{3-2n+64n^6}}{\sqrt[4]{25+n+n^4}}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+4}+n}{\sqrt[3]{n^3-8}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}n(7n-\sqrt{49n^2-1})$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{n^7+4n^2+1}}{3n+\sqrt{n}}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+17n+6}{5n^2+\sqrt{9n^4+3}}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-6n+\sqrt{n^5}}{3n^3-4}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n}-n)$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{3n}+\sqrt{n^3}}{1+n}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+n\sqrt{n}}{\sqrt{3n^3+5}}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}+n^2}{7n+\sqrt[4]{16n^4+1}}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{n^7+1}+1}{3\sqrt{n^2+1}+n}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n+3})$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^4+2}+3n}{\sqrt{n^2-2}+2n}$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n}-\sqrt{n^3+2n^2})$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^6+2}+n}$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^4+5}}$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{n}-1}{n+3}$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4n}-n)$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+5}{2n^3+\sqrt[3]{n}}$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^3}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+n}{\sqrt[3]{n^4+3}}$

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-4n}{(n-3)^2-(n+3)^2}$

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{n^2+1}$

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n+10}{\sqrt[3]{n^{12}+3}}$

III. Найти, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{tg^2 2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\, tg3x}{\cos x-\cos^2 x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\arcsin^2 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 7x-\cos 4x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{1-\cos 2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 8x}{\cos x+\cos\pi}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{4x^3}$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{tg(2+x)}$ 11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-10x+16}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x^3)-1}{\sin^6 2x}$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos^2 x-cos^2 2}{x^2-4}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x\ -\ tgx}{\sin 3x}$ 15) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{arctg(x+1)}{x^3+1}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} x(ctg5x-ctg3x)$ 17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(5x-5)}{\cos x-\cos 1}$ 18) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{tgx-tg5}{x^2-2x-15}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 13x}{\arcsin^2 x}$ 20) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin 2x+\sin 6}{x^3+27}$ 21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{tg^2 3x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 4x}{x\, tg5x}$ 23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x-1)-1}{\sin^2(2x-2)}$ 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x-\cos x^2}{x^2-1}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin(x^2)}{tg5x}$ 26) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$ 27) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{\cos x-\cos 3}$

28) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\cos(x+1)}{x^3+2x^2+x}$ 29) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{tg5-tgx}{x^2-25}$ 30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos x-\cos 5x}$.

IV. Вычислить, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2+3}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-4}\right)^n$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+3}\right)^{n^2}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+5}\right)^n$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+1}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n-1}\right)^n$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-9}{n-3}\right)^{n+2}$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n-1}\right)^{n-4}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{4-n}$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{5n}$ 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-8}{n^2+1}\right)^{2n^2}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+8x}{1-7x}\right)^{3/x}$ 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+1}{2n^3-7}\right)^{n^3}$ 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+8}\right)^{n}$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{3n^2}$ 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+3}\right)^{5n^2}$ 21) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{1/(3x-3)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{1/(x-1)}$ 23) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{3/(x+1)}$ 24) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{1/(x+2)}$

25) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{1/(3-x)}$ 26) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4}{n^2-1}\right)^{n^2+1}$ 27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{5n}$

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+1}\right)^{n}$ 29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+5}\right)^{n^2}$ 30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-2}\right)^{n^3}$

V. Определить, где функция $f(x)$ непрерывна, найти точки разрыва и их классифицировать.

1) $a)\ f(x)=\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4}$; $b)\ f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

2) $a)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{arctg(x+1)}$; $b)\ f(x)=\dfrac{2}{1-3^{x/(x-1)}}$

3) $a)\ f(x)=\dfrac{\sin^2 3x}{2x^2+x^4}$; $b)\ f(x)=\dfrac{|x+2|}{4-x^2}$

4) $a)\ f(x)=\dfrac{tg(2x)}{x}$; $b)\ f(x)=\dfrac{1}{1-e^{x/(x-1)}}$

5) $a)\ f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$; $b)\ f(x)=\dfrac{1}{1+8^{3/x}}$

6) $a)\ f(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2}$; $b)\ f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/(x+5)}}$

7) $a)\ f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x^2+3x}$; $b)\ f(x)=3^{1/(x-1)}-1$

8) $a)\ f(x)=\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$; $b)\ f(x)=\dfrac{1}{1-4^{x/(x+1)}}$

9) $a)\ f(x) = \dfrac{x}{\sin 3x}$; $b)\ f(x) = 4x + 6^{1/(x-5)}$

10) $a)\ f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{6}{1-2^{x/(x+3)}}$

11) $a)\ f(x) = \dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{1}{1+4^{1/(x-2)}}$

12) $a)\ f(x) = \dfrac{|x+2|}{x^2+2x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{\sin 2x}{arctg 3x}$

13) $a)\ f(x) = \dfrac{\sin 5x}{\arcsin 4x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$

14) $a)\ f(x) = \dfrac{|x|}{3x^2+x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

15) $a)\ f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$; $b)\ f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

16) $a)\ f(x) = \dfrac{arctg(x+1)}{3x+3}$; $b)\ f(x) = \dfrac{|x|}{x^4-x}$

17) $a)\ f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^3+3x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{|x-3|}{x^2-2x-3}$

18) $a)\ f(x) = \dfrac{|x+1|}{x^2-2x-3}$; $b)\ f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x^3+1}$

19) $a)\ f(x) = \dfrac{|x+4|}{2x^2+11x+12}$; $b)\ f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$

20) $a)\ f(x) = \dfrac{|x|}{x^3+x}$; $b)\ f(x) = \dfrac{arctg(x-1)}{2x^2-x-1}$

21) $a)\ f(x) = sign(x^2+3x+2)$; $b)\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x-3x^2}$

22) $a)\ f(x) = sign(x^2+2x)$; $b)\ f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$

23) $a)\ f(x) = sign(3-2x-x^2)$; $b)\ f(x) = \dfrac{\arcsin x}{2x+3x^2}$

24) $a)\ f(x) = sign(2x^2-5x+2)$; $b)\ f(x) = \dfrac{3-\sqrt{3+x}}{x^2-36}$

25) $a)\ f(x) = sign(9x - 18 - x^2);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

26) $a)\ f(x) = sign(4x - x^2);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{arctg(x+1)}{x^3 + x^2}$

27) $a)\ f(x) = sign(2x^2 + 7x + 6);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

28) $a)\ f(x) = sign(2 - x - x^2);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{arctg(x^2)}{x^2 - 2x^3}$

29) $a)\ f(x) = sign(3x^2 + 8x - 3);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{4 - x^2}$

30) $a)\ f(x) = sign(9 - x^2);$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{x - 2}{6 - x - x^2}.$

VI. Найти производную указанной функции.

1) $y = \sqrt{arctg\,3x}$
2) $y = tg\big(\ln(3 - 2x)\big)$
3) $y = 2^{ctg(5x-1)}$
4) $y = \lg\big(\cos(2x - 4)\big)$
5) $y = \sqrt[5]{(arctg\,3x - x)^3}$
6) $\lg\left(\dfrac{x^2}{2} + tg\,3x\right)$
7) $y = arcctg\big(\cos 3x + \lg(3x + 2)\big)$
8) $y = \ln(\sqrt{x} + \arcsin 2x)$
9) $y = e^{arccos(3x+1)}$
10) $y = \sin\big(\sqrt[3]{9 - x^2} + 3/x\big)$
11) $y = tg\big(\arccos(1 - 3x)\big)$
12) $y = \arcsin\big(\lg(1 - 5x)\big)$
13) $y = arctg^2(1 - 3^{2x}/2)$
14) $y = e^{\sin^2(3x+2)}$
15) $y = \sin\big(tg(1 - 6x)\big)$
16) $y = \ln(\arcsin 3x - x^2)$
17) $y = ctg(x^3 + arctg 2x)$
18) $y = \ln\big(ctg 5x - \cos 3x\big)$
19) $y = \ln\big(arctg(x^3 - x)\big)$
20) $y = \sin\big(\ln(5x - x^3)\big)$
21) $y = e^{\arccos(4 - 5x^2)}$
22) $y = e^{\ln(x^2 - tgx)}$
23) $y = \arcsin\big(e^{3x} - ctgx\big)$
24) $y = \lg(\arcsin 3x - \sqrt[3]{x})$
25) $y = \ln\big(arcctg 2x + 3^x\big)$
26) $y = \ln\big(4^x + tg 4x\big)$
27) $y = \lg(\arcsin(1 - 3x))$
28) $y = e^{\arcsin(1 - 8x^3)}$
29) $y = \arccos\big(tg 3x - x^3\big)$
30) $y = \lg(\sin 3x + x^4)$

VII. Найти вторую производную функции $f(x)$ в точке x_0.

1) $f(x) = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x), \quad x_0 = \pi/2$

2) $f(x) = e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x), \quad x_0 = \pi/2$

3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x_0 = 1$

4) $f(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1), \quad x_0 = 1$

5) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1}), \quad x_0 = 2$

6) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-9x^2}, \quad x_0 = 1$

7) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad x_0 = 1$

8) $f(x) = \dfrac{5x}{3}\sqrt[3]{(x-5)^2} - \sqrt[3]{(x-5)^5}, \quad x_0 = 6$

9) $f(x) = \sqrt{x} - (1+x)arctg\sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

10) $f(x) = xarctgx - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}, \quad x_0 = 1$

11) $f(x) = x(\sin\ln x - \cos\ln x), \quad x_0 = 1$

12) $f(x) = (x+2)e^{x^2}, \quad x_0 = 0$

13) $f(x) = x(\cos\ln x + \sin\ln x), \quad x_0 = 1$

14) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}), \quad x_0 = 1$

15) $f(x) = x - \ln(1 + e^x), \quad x_0 = 0$

16) $f(x) = e^{-2x}(2\sin 4x - \cos 4x), \quad x_0 = \pi/4$

17) $f(x) = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x + 2}, \quad x_0 = 0$

18) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-4x^2}\right), \quad x_0 = 1/3$

19) $f(x) = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x), \quad x_0 = 0$

20) $f(x) = (1+x)arcctg\sqrt{x} + \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

21) $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x\ln(x + \sqrt{x^2+3}), \quad x_0 = 0$

22) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x_0 = 1$

23) $f(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}), \quad x_0 = 0$

24) $f(x) = e^{-2x}(x^2 - 3x + 1), \quad x_0 = 0$

25) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \quad x_0 = 1$

26) $f(x) = (1+x) arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

27) $f(x) = e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2), \quad x_0 = 0$

28) $f(x) = \ln(x^2 - 1) - \dfrac{1}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 0$

29) $f(x) = x - \ln(1 + e^x), \quad x_0 = 0$

30) $f(x) = \sqrt{e^x + 1} - (2 + e^x) arctg \sqrt{e^x + 1}, \quad x_0 = 1.$

VIII. Найти дифференциал функции $f(x)$ в указанной точке x_0.

1) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{\ln(x+1)},\ x_0 = 1$

2) $f(x) = arccos\, \dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ x_0 = 1$

3) $f(x) = arcctg\, \dfrac{3x-1}{x^2+1},\ x_0 = 0$

4) $f(x) = arctg\, \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},\ x_0 = 1$

5) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-2}},\ x_0 = 3$

6) $f(x) = e^{\sin x}\Big(x - \dfrac{1}{\cos x}\Big),\ x_0 = 3$

7) $f(x) = \sin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}},\ x_0 = 3$

8) $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}},\ x_0 = 1$

9) $f(x) = \dfrac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{x},\ x_0 = 2\pi$

10) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x+1}},\ x_0 = 0$

11) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}},\ x_0 = 0$

12) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1},\ x_0 = 0$

13) $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}},\ x_0 = 1$

14) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},\ x_0 = 0$

15) $f(x) = \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}},\ x_0 = 0$

16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}},\ x_0 = 1$

17) $f(x) = \dfrac{1 + tg(x/2)}{1 - tg(x/2)},\ x_0 = 0$

18) $f(x) = e^{\frac{2x^2-1}{4-x^2}},\ x_0 = 1$

19) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-9}{x^2+8}},\ x_0=6$

20) $f(x)=\dfrac{18e^{2x}+27e^x+14}{(e^{2x}+1)^2},\ x_0=0$

21) $f(x)=\dfrac{\cos 2x+x}{1-2\sin x},\ x_0=0$

22) $f(x)=\dfrac{\sin 3x+x}{3\cos x-1},\ x_0=0$

23) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6},\ x_0=1$

24) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx},\ x_0=\pi/4$

25) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx},\ x_0=\pi/4$

26) $f(x)=\sin\dfrac{2x}{1+x^2},\ x_0=0$

27) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x},\ x_0=0$

28) $f(x)=\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\ x_0=0$

29) $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x,\ x_0=\pi/2$

30) $f(x)=x-\ln(1+e^x+\sqrt{e^{2x}+2e^x+3}),\ x_0=0.$

IX. Вычислить, используя правило Лопиталя.

1) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{x},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

2) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

3) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

4) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\,arctg\,x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

5) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{3x^2},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +\infty}x\big(\pi-2arctgx\big)$

6) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\big(\dfrac{2}{\pi}\,arctgx\big)$

7) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin(x^2)},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to \pi/2}\cos x\ln(\sin x)$

8) $a)\ \lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln(tg\,x)}{\cos 2x},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +\infty}x\big(e^{1/x}-1\big)$

9) $a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3},$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x+1}$

10) $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctg\, x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

11) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-7\sin x}{x^2}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\ln x$

12) $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

13) $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5^x+1}{x^2}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}\sin x\ln(\sin x)$

14) $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x-3}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}x\ln(ctgx)$

15) $a)\ \lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos 7x}{\cos 5x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$

16) $a)\ \lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos 13x}{\cos 9x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

17) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x+9}{(x-1)^2}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}(ctgx-\dfrac{1}{x})$

18) $a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}x^2\ln x$

19) $a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}x\ln(\sin x)$

20) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x+5}{x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

21) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}-1}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1-0}\cos(\pi x/2)\ln(1-x)$

22) $a)\ \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}xe^{1/x}$

23) $a)\ \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x})$

24) $a)\ \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln(x^2+1)}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$

25) $a)\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{4-x^2}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$

26) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0} x\ln(1-\cos x)$

27) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0}\sqrt{x}\ln x$

28) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0} x\ln^2 x$

29) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to +0} tgx\ln x$

30) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{1-x}$, $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})ctgx$

X. Найти интервалы возрастания и убывания, максимумы и минимумы функции $f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

2) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

4) $f(x)=x\ \sqrt[3]{x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$

6) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$

7) $f(x)=\dfrac{x^3}{(2-x)^2}$

8) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$

9) $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^3}$

10) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$

11) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$

12) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}$

13) $f(x)=\ln(x^2+1)-2arctgx$

14) $f(x)=(x+5)^2e^{-x}$

15) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$

16) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x-2x^4}$

19) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

20) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

21) $f(x) = (x^2+1)arctgx - x + \pi x^2/4$

22) $f(x) = \sqrt[3]{5x^3 - 3x}$

23) $f(x) = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$

24) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$

25) $f(x) = (-x+1/2)\cos x + \sin x + \dfrac{x-x^2}{4}$

26) $f(x) = \sqrt[3]{16 - x^4}$

27) $f(x) = (x^2+1)arcctgx + x - \pi x^2/4$

28) $f(x) = e^{-2x}\sin^2 x$

29) $f(x) = (x^2-2x)\ln x + 4x - \dfrac{3x^2}{2}$

30) $f(x) = x^2\sqrt[3]{6x-7}$

XI. Найти точки перегиба и указать интервалы выпуклости вверх и вниз данной функции.

1) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$

2) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - 2x^3 + \dfrac{11x^2}{2} - 3$

4) $f(x) = e^{1/x}$.

5) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x$

6) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$

7) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2 - 3x - 123$

8) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

9) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

10) $f(x) = e^{2x-x^2}$

11) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 36x$

12) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x$

13) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x > 0$

14) $f(x) = arcctg(1/x)$

15) $f(x) = 36x(x-1)^3$

16) $f(x) = (x^2-1)^3$

17) $f(x) = x^3e^{-4x}$

18) $f(x) = e^{-x^2}$

19) $f(x) = (x-3)(x-5)^2$

20) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

21) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}$

22) $f(x) = e^{-x^3}$

23) $f(x) = 5x^3 - 5x^4 + \dfrac{3x^5}{2}$

24) $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^4}$

25) $f(x) = x^2e^{-x}$

26) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

27) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$

28) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

29) $f(x) = arctg(x^2)$

30) $f(x) = \ln(1+x^2)$

XII. Провести исследование и построить график функции $f(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

2) $f(x) = x^2 e^{-x}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

4) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

6) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

7) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

8) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

10) $f(x) = (x-1)^2(2+x)$

11) $f(x) = xe^{2/x}$

12) $f(x) = \dfrac{4}{4 - x^2}$

13) $f(x) = xe^{-2x}$

14) $f(x) = x(x-1)^3$

15) $f(x) = xe^{-x^2/2}$

16) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

17) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

18) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

19) $f(x) = x \ln x$

20) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

21) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$

22) $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

23) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

24) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

25) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

26) $f(x) = \dfrac{2x - x^2 - 4}{x}$

27) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2}$

28) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$

29) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{4 + x^2}$

30) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$

XIII. Найти неопределенные интегралы.

1) $a) \int arcctgx\,dx;$ $b) \int \frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $a) \int arctg(4x)\,dx;$ $b) \int \frac{\arccos^4 x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $a) \int x\sin 3x\,dx;$ $b) \int \frac{x^2+\ln^3 x}{x}\,dx$

4) $a) \int x3^{-x}\,dx;$ $b) \int \frac{\ln^3(x+\sqrt{1-x^2})\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $a) \int x^2\sin x\,dx;$ $b) \int e^x\sqrt{1-e^x}\ dx$

6) $a) \int (x-3)e^{2x}\,dx;$ $b) \int \frac{\arccos^4 x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $a) \int (2-x)\sin 3x\,dx;$ $b) \int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+3)}\,dx}{2x+6}$

8) $a) \int \ln^2 x\,dx;$ $b) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

9) $a) \int arctg\sqrt{5x-1}\,dx;$ $b) \int \frac{cos\ln x}{x}\,dx$

10) $a) \int \ln(x^2+4)\,dx;$ $b) \int \frac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{e^x+1}}$

11) $a) \int arcctg\sqrt{2x-1}\,dx;$ $b) \int \frac{e^{2x}\ dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

12) $a) \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\ dx;$ $b) \int \frac{tg^3(x+1)}{\cos^2(x+1)}\ dx$

13) $a) \int \frac{\ln x\,dx}{x^2};$ $b) \int \frac{e^{arctgx}\,dx}{1+x^2}$

14) $a) \int x\cos 3x\ dx;$ $b) \int \frac{e^{\sqrt{x}}\ dx}{\sqrt{x}}$

15) $a) \int (2-x)e^{-3x}\ dx;$ $b) \int \frac{dx}{x(1-\ln^2 x)}$

16) $a) \int (2+x)\cos x\, dx;$ $b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^3}$

17) $a) \int (3+x)e^{3x}\ dx;$ $b) \int \frac{ctg^5 2x\ dx}{\sin^2 2x}$

18) $a) \int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx;$ $b) \int e^{x^2-3}x\ dx$

19) $a) \int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx;$ $b) \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^4}}$

20) $a) \int \frac{\ln(\sin x)\ dx}{\cos^2 x};$ $b) \int \frac{\sqrt{arctg 3x}\ dx}{1+9x^2}$

21) $a) \int \ln(x+2)\ dx;$ $b) \int \frac{\sqrt[5]{arcctg x}\ dx}{1+x^2}$

22) $a) \int \sqrt[3]{x}\ \ln x\ dx;$ $b) \int \frac{arctg^3 x\ dx}{1+x^2}$

23) $a) \int \sqrt{x}\ln x\ dx;$ $b) \int xe^{-x^2}\ dx$

24) $a) \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\ dx;$ $b) \int x\sqrt{x^2-1}\ dx$

25) $a) \int \ln(4x^2+1)\ dx;$ $b) \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$

26) $a) \int \frac{\arccos x\ dx}{\sqrt{1+x}};$ $b) \int \frac{x\ dx}{1+x^4}$

27) a) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\ln^4(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

28) a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(x-\sin x)^2}$

29) a) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$; b) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$

30) a) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\sin\ln x}{x}\,dx$

XIV. Найти неопределенный интеграл от рациональной функции.

1) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+6x-4}$

2) $\displaystyle\int \frac{(x+6)\,dx}{x^2+2x+4}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{6-x^2-4x}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+1}$

5) $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+2x+3}$

6) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{2-2x+x^2}$

7) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2+4x-4}$

8) $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+10x+4}$

9) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x^2-2x}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-x^2+6x}$

11) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)\,dx}{2+2x-x^2}$

12) $\displaystyle\int \frac{(6x+1)\,dx}{5+6x+9x^2}$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+13}$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-10x-x^2}$

15) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+16x+x^2}$

16) $\displaystyle\int \frac{(2-x)\,dx}{7-2x-x^2}$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-x^2-x}$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-4x-x^2}$

19) $\displaystyle\int \frac{(x-3)\,dx}{1-10x-x^2}$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-12x+40}$

21) $\int \frac{(1-x)\,dx}{2-12x-x^2}$

22) $\int \frac{dx}{1-8x-x^2}$

23) $\int \frac{(x-5)\,dx}{8-2x-x^2}$

24) $\int \frac{dx}{1-10x+x^2}$

25) $\int \frac{(3-x)\,dx}{10-2x-x^2}$

26) $\int \frac{(1+2x)\,dx}{x^2+12x+1}$

27) $\int \frac{(4+x)\,dx}{1+12x+x^2}$

28) $\int \frac{dx}{4+8x-x^2}$

29) $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}$

30) $\int \frac{x\,dx}{4-8x-x^2}$

XV. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций.

1) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$; $b) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

2) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; $b) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$

3) $a) \int \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$; $b) \int \frac{(x-1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$

4) $a) \int \frac{(3-x)\,dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$; $b) \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+10}$

5) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{5+6x+x^2}}$; $b) \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-2}}$

6) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$; $b) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$

7) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-2x+x^2}}$; $b) \int \frac{\sqrt{x+4}\,dx}{x}$

8) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; $b) \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$

9) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$; $b) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

10) $a) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-4x+4x^2}}$; $b) \int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-1}}$

11) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{4-6x+x^2}}$; $b) \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

12) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; $b) \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x+2}}$

13) $a) \int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$; $b) \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-4}}$

14) $a) \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-4x+x^2}}$; $b) \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$

15) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+6x}}$; $b) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$

16) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{20-8x+x^2}}$; $b) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

17) $a) \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{12+6x+x^2}}$; $b) \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-7}}$

18) $a) \int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-4x}}$; $b) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$

19) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $b) \int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x+2}}$

20) $a) \int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; $b) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$

21) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$; $b) \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

22) $a) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x+x^2}}$; $b) \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x+1}}$

23) $a) \int \frac{dx}{\sqrt{5-12x+4x^2}}$; $b) \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x+6}}$

24) $a) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$; $b) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$

25) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$

26) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{x-3}$

27) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-3}}$

28) a) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{1+\sqrt[6]{2x+1}}\,dx$

29) a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+8x-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{5x+6}+\sqrt[6]{5x+6}}{\sqrt[3]{5x+6}+7}\,dx$

30) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x+x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

XVI. Найти интеграл от тригонометрической функции.

1) $\int \sin^2(\frac{3x}{2}+1)\,dx$ 2) $\int \sin^2(2x-1)\,dx$

3) $\int \cos^3 2x\,dx$ 4) $\int \sin 2x \cos 13x\,dx$

5) $\int \cos^2(3x)\sin 6x\,dx$ 6) $\int \cos^3(3x)\,dx$

7) $\int \cos 2x \sin^2 4x\,dx$ 8) $\int \sin^3 7x\,dx$

9) $\int \sin^2 2x\,dx$ 10) $\int \cos 2x \cos^2 x\,dx$

11) $\int \sin^2(2x)\cos 4x\,dx$ 12) $\int \sin^3(2x)\,dx$

13) $\int \sin^3 3x\,dx$ 14) $\int \sin^4 7x\,dx$

15) $\int \cos^4 x\,dx$ 16) $\int \sin^4(3x)\,dx$

17) $\int \sin 2x \sin^2 x\,dx$ 18) $\int \sin x \sin^2 2x\,dx$

19) $\int \sin 7x \sin 2x \; dx$

20) $\int \cos^4 2x \, dx$

21) $\int \sin 19x \cos x \, dx$

22) $\int \sin 19x \cos^2 3x \, dx$

23) $\int \cos^2 3x \, dx$

24) $\int \sin^4 x \, dx$

25) $\int \cos^4 (x/2) \, dx$

26) $\int \cos^2 2x \cos 4x \, dx$

27) $\int \cos 19x \cos x \, dx$

28) $\int \cos^3 5x \, dx$

29) $\int \cos^4 2x \, dx$

30) $\int \cos^2 13x \, dx$

Литература

1. Налбандян Ю.С., Подпорин В.П. Развернутая программа по математическому анализу. Методические указания для студентов заочного отделения экономического факультета РГУ. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ. 1997.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука. 1975 (и более поздние издания).

3. Абанин А.В., Епифанов О.В., Подпорин В.П. Функции, пределы, производные. Методические указания для студентов ОЗО экономического факультета. УПЛ РГУ, 1989.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987 (и более поздние издания).

5. Высшая математика для экономистов: для вузов. Под ред. Н.Ш.Кремера. М.: Банки и Биржи, ЮНИТИ. 1998.