МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В.АБАНИН, Ю.С.НАЛБАНДЯН

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ. ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Методические указания по математическому анализу
для студентов 1–2 курсов
механико-математического факультета РГУ

Ростов-на-Дону, 1998

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Данные методические указания предназначены для студентов 1–2 курсов механико-математического факультета РГУ. Содержат теоретический материал и различные примеры практического характера. Могут также использоваться преподавателями на практических занятиях и при выборе заданий для учебных курсовых работ.

Методические указания печатаются в соответствии с решением кафедры математического анализа Ростовского государственного университета, протокол N 5 от 12 января 1998 года.

Содержание

Данная разработка является продолжением методических указаний А.В.Абанина и Ю.С.Налбандян "Верхний и нижний пределы числовой последовательности". Она посвящена двум взаимосвязанным разделам математического анализа (верхнему и нижнему пределу функций и полунепрерывным сверху и снизу функциям), которые не включаются в стандартный лекционный курс, но играют важную роль при решении задач и широко используются в смежных математических дисциплинах (в частности, в теории целых и субгармонических функций).

Методические указания включают теоретические сведения и задачи различного уровня сложности (от чисто технических до представляющих собой развитие теории) и могут использоваться при самостоятельном освоении математического анализа и смежных математических дисциплин, для факультативных занятий и учебных курсовых работ по математическому анализу на младших курсах мехмата, а также на старших курсах в качестве вспомогательного материала при изучении различных спецкурсов.

Нумерация утверждений и формул соответствует нумерации пунктов и разделов. Например, ссылка "Теорема 1.7" означает теорему из пункта 1.7 раздела 1.

1. Верхний и нижний пределы функции

1.1. Напомним некоторые необходимые нам в дальнейшем сведения и обозначения. Для $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ $|x| := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}$.

ε–**окрестностью** точки $a \in \mathbb{R}^N$ называется открытый шар

$$U_a(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x - a| < \varepsilon\}$$

с центром в точке a.

Далее,

$$\widetilde{U}_a(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

называется **проколотой** ε–**окрестностью** точки a.

Символом $\mathbb{R}^N_\infty$ обозначается $\mathbb{R}^N$, дополненное бесконечно удаленной точкой ∞, а ε–**окрестностью** ∞ называется

$$U_\infty(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1/\varepsilon\}.$$

Следует заметить, что в $\mathbb{R}^N$ понятия ε–окрестности ∞ и проколотой ε–окрестности ∞ совпадают.

Точка $a \in \mathbb{R}^N_\infty$ называется **предельной точкой множества** X из $\mathbb{R}^N$, если в любой её проколотой окрестности имеется хотя бы одна точка из

X. Как известно, $a \in \mathbb{R}^N_\infty$ является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}^N$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям: $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$.

В дальнейшем потребуется следующее известное утверждение.

Теорема Гейне. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Для того чтобы $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$, существовал бы $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = A$.*

Здесь $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (в дальнейшем для $\overline{\mathbb{R}}$ чаще будет использоваться обозначение $[-\infty, +\infty]$).

Определение. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка множества X, $f : X \to [-\infty, +\infty]$.* **Верхним пределом** *функции f в точке a называют величину*

$$\varlimsup_{x\to a} f(x) := \lim_{\delta\to+0} \sup_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} f(x), \tag{1.1}$$

а **нижним** *её* **пределом** *в этой же точке — величину*

$$\varliminf_{x\to a} f(x) := \lim_{\delta\to+0} \inf_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} f(x). \tag{1.2}$$

Замечания. 1) Как следует из определения, допускается рассмотрение функций, которые могут принимать значения $-\infty$ и (или) $+\infty$.

2) В данном определении считается, что если в любой проколотой окрестности точки a фигурирующие в (1.1) и (1.2) точные верхние и нижние грани равны $+\infty$ (соответственно, $-\infty$), то таков же и их предел при $\delta \to +0$.

3) Очевидно, что всегда $-\infty \leqslant \varliminf\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup\limits_{x\to a} f(x) \leqslant +\infty$.

1.2. Предложение. *Определение 1.1 корректно, т.е. пределы в (1.1) и (1.2) всегда существуют (конечные или равные $+\infty$ или $-\infty$).*

Доказательство. Проведем рассуждения для верхнего предела, так как для нижнего они осуществляются аналогично.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(\delta) := \sup_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} f(x), \qquad \delta > 0.$$

Ясно, что $\varphi : (0, +\infty) \to [-\infty, +\infty]$. Так как при $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$ $\widetilde{U}_a(\delta_1) \subset \widetilde{U}_a(\delta_2)$, то $\varphi(\delta_1) \leqslant \varphi(\delta_2)$.

Если $\exists\delta_0$ такое, что на $(0,\delta_0]$ функция φ принимает лишь конечные значения, то на $(0,\delta_0]$ мы имеем обычную вещественнозначную неубывающую функцию. По теореме о существовании предела монотонной на промежутке функции на его концах заключаем, что $\exists \lim\limits_{\delta\to+0}\varphi(\delta)\in[-\infty,+\infty)$. Таким образом, в этом случае утверждение предложения справедливо.

Если $\exists\delta_0$ такое, что $\varphi(\delta_0)=-\infty$, то $\varphi(\delta)=-\infty$, $\forall\delta\in(0,\delta_0]$ (так как $\varphi(\delta)\leqslant\varphi(\delta_0)$, $\forall\delta\in(0,\delta_0))$, и снова $\exists \lim\limits_{\delta\to+0}\varphi(\delta)=-\infty$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\forall\delta>0$ $\varphi(\delta)=+\infty$. Но при этом очевидно, что $\exists \lim\limits_{\delta\to+0}\varphi(\delta)=+\infty$. $\square$

1.3. Теорема. *Пусть $f:X\to[-\infty,+\infty]$, $X\subset\mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=-\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Доказательство. Пусть выполнено (i). Тогда по определению 1.1 верхнего предела

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma>0:\quad \sup_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)}f(x)<-1/\varepsilon \ \text{ при всех }\ \delta:\ 0<\delta<\sigma.$$

Отсюда и из определения точной верхней грани получаем, что при всех $x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta/2)$ также и $f(x)<-1/\varepsilon$, т.е. по определению предела $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Пусть, обратно, имеет место (ii). Тогда по определению предела

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma>0:\qquad f(x)<-1/\varepsilon\quad \forall x\in X\cap\widetilde{U}_a(\sigma).$$

Следовательно, и $\sup\limits_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)}f(x)\leqslant-1/\varepsilon$. Тем более, при всех δ таких, что $0<\delta<\sigma$, $\sup\limits_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)}f(x)\leqslant-1/\varepsilon$. По определению предела

$$\lim_{\delta\to+0}\ \sup_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)}f(x)=-\infty$$

или, что то же самое, $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,f(x)=-\infty$. $\square$

1.4. Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = +\infty$;

(ii) $f(x)$ *не ограничена сверху (в частности, может принимать значения, равные* $+\infty$*) в любой проколотой окрестности точки* a*;*

(iii) $\exists \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$*, удовлетворяющая условиям* $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ *и* $x^{(n)} \to a$ *при* $n \to \infty$ *такая, что* $f(x^{(n)}) \to +\infty$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть выполнено (i). Предположим, рассуждая от противного, что (ii) не выполняется, т.е. имеется $\delta_0 > 0$: $f(x)$ ограничена сверху в $\widetilde{U}_a(\delta_0)$ или, что то же самое,

$$\exists M \in (0, +\infty): \quad f(x) \leqslant M,\ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0).$$

Тогда при всех $\delta \in (0, \delta_0]$ $\sup\limits_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) \leqslant M$ и по определению 1.1 $\overline{\lim\limits_{x\to z}} f(x) \leqslant M$, что противоречит (i). Итак, (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Если выполнено (ii), то $\forall \delta > 0$ $\sup\limits_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) = +\infty$ и, следовательно, по определению 1.1 $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = +\infty$. Значит, (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Эквивалентность (ii) и (iii) — известный факт для функций, принимающих конечные значения. Равносильность этих условий в случае, когда f может принимать значения, равные $+\infty$, в произвольной проколотой окрестности точки a очевидна. $\square$

1.5. Теорема. *Пусть* f, X, a *— те же, что и в теореме 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

$$(i) \quad \overline{\lim_{x\to a}} f(x) = A \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \begin{cases} (ii_1)\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 |\ \ f(x) \leqslant A + \varepsilon,\ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta); \\ (ii_2)\ \exists \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} |\ \ x^{(n)} \in X,\ x^{(n)} \neq a\,(n \in \mathbb{N}),\ x^{(n)} \to a \text{ при } n \to \infty : \\ \qquad f(x^{(n)}) \to A \text{ при } n \to \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что $(i) \Longrightarrow (ii)$. По определению 1.1 и определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0: \qquad \sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) < A + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \delta \in (0, \sigma).$$

Тем более,

$$f(x) < A + \varepsilon, \qquad \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\sigma/2).$$

Значит, $(i) \implies (ii_1)$.

Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. По определению 1.1 и определению предела

$$\exists \delta_n > 0 : \quad A - \frac{1}{n} < \sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) < A + \frac{1}{n},$$

как только $0 < \delta < \delta_n$. Положим $\delta_n^* = \frac{1}{2}\min\{1/n, \delta_n\}$. Тогда из последнего условия получаем:

$$A - \frac{1}{n} < \sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_n^*)} f(x) < A + \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует по характеристическим свойствам точной верхней грани, что $\exists x^{(n)} \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_n^*)$:

$$A - \frac{1}{n} < f(x^{(n)}) < A + \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Итак, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x^{(n)} \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_n^*)$: выполнено (1.3). Ясно, что $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ и, так как $\delta_n^* \to +0$ при $n \to \infty$, то $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$. Из (1.3) следует по теореме о трех последовательностях, что $f(x^{(n)}) \to A$ при $n \to \infty$.

Таким образом, $(i) \implies (ii_2)$. Доказательство импликации $(i) \implies (ii)$ завершено.

Предположим теперь, что выполнено утверждение (ii). Из (ii_1) заключаем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) \leqslant A + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to +0$, получим по определению 1.1, что $\varlimsup\limits_{x \to a} f(x) \leqslant A$.

Пусть далее $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, существование которой утверждается в (ii_2). Положим $\delta_n = |x^{(n)} - a|$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\delta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\delta_n \to +0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(2\delta_n)} f(x) \geqslant f(x^{(n)})$$

и, переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) \geqslant A$ (используется теорема Гейне для $\lim\limits_{\delta \to +0} \sup\limits_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) = \overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$).

Объединяя теперь оба неравенства, заключаем, что $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) = A$. Итак, $(ii) \Longrightarrow (i)$. $\square$

Теоремы 1.3–1.5 представляют собой характеризацию верхнего предела функции в терминах обычных пределов и понятия ограниченности функции сверху. Аналогичная характеризация верна и для нижних пределов (см. ниже теоремы 1.6–1.8).

1.6. Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

1.7. Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) = -\infty$*;*

(ii) $f(x)$ не ограничена снизу (в частности, может принимать значения, равные $-\infty$) в любой проколотой окрестности точки a;

(iii) $\exists \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$ такая, что $f(x^{(n)}) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

1.8. Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

$$(i) \quad \underline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) = B \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \begin{cases} (ii_1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 |\ f(x) \geqslant B - \varepsilon,\ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta); \\ (ii_2)\ \exists \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} |\ x^{(n)} \in X,\ x^{(n)} \neq a\,(n \in \mathbb{N}),\ x^{(n)} \to a \text{ при } n \to \infty : \\ \qquad f(x^{(n)}) \to B \text{ при } n \to \infty. \end{cases}$$

Из теорем 1.3–1.8 следует такой критерий существования предела функции в $\overline{\mathbb{R}}$.

1.9 Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Для того чтобы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x).$$

В случае существования предела или равенства верхнего и нижнего пределов все три предела равны.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Если $A = -\infty$, то по теореме 1.3 $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. Так как всегда

$$-\infty \leqslant \varliminf_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a} f(x),$$

то тогда и $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Если $A = +\infty$, то по теореме 1.6 $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, а поскольку всегда

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a} f(x) \leqslant +\infty,$$

то и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Наконец, если $A \in \mathbb{R}$, то по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta).$$

Тогда

$$A - \varepsilon \leqslant \inf_{x\in X\cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) \leqslant \sup_{x\in X\cap \widetilde{U}_a(\delta)} f(x) \leqslant A + \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \to +0$, получим по определению 1.1:

$$A - \varepsilon \leqslant \varliminf_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a} f(x) \leqslant A + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x) = A.$$

Достаточность. Пусть $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) = \varlimsup\limits_{x\to a} f(x) = A$. Если $A = -\infty$, то по теореме 1.3, а если $A = +\infty$, то по теореме 1.6 $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Далее, если $A \in \mathbb{R}$, то по теоремам 1.5 и 1.8 (см. условия (ii_1)) $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0: \ \ f(x) \leqslant A + \varepsilon, \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_1);$$

$$\exists \delta_2 > 0: \ \ f(x) \geqslant A - \varepsilon, \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_2).$$

Взяв $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим, что для $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)$ оба эти неравенства выполнены одновременно, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \quad A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant A + \varepsilon, \ \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta).$$

По определению предела $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. $\square$

Отметим некоторые свойства верхнего и нижнего предела функции.

1.10. Теорема. *Пусть f, X, a — те же, что и в теореме 1.3. Тогда*

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = -\varlimsup_{x\to a}(-f(x)); \quad \varlimsup_{x\to a} f(x) = -\varliminf_{x\to a}(-f(x)).$$

Доказательство. Так как

$$\inf_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} f(x) = -\sup_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} (-f(x)),$$

то, переходя здесь к пределу при $\delta \to +0$, получим первое равенство. Аналогично доказывается второе. $\square$

1.11. Теорема. *Пусть $f: X \to [-\infty, +\infty]$, $g: X \to [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Если в некоторой проколотой окрестности $\widetilde{U}_a(\delta_0)$ точки a выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \leqslant \varliminf_{x\to a} g(x); \quad \varlimsup_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a} g(x).$$

Доказательство. Ясно, что при всех $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\inf_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} f(x) \leqslant \inf_{x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta)} g(x).$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to +0$, получим, что $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \varliminf\limits_{x\to a} g(x)$. Точно так же доказывается второе неравенство. $\square$

Следствие. *Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Верны следующие утверждения:*

1) если $\exists \delta_0 > 0$: $f(x) \geqslant A$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$, то $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) \geqslant A$;

2) если $\exists \delta_0 > 0$: $f(x) \leqslant B$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$, то $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x) \leqslant B$;

3) если $\exists \delta_0 > 0$: $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$, то

$$A \leqslant \varliminf_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a} f(x) \leqslant B;$$

1.12. *Теорема. Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Верны следующие утверждения:*

1) если $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) > A$, то $\exists \delta_0 > 0$: $f(x) > A$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$;

2) если $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x) < B$, то $\exists \delta_0 > 0$: $f(x) < B$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$;

3) если $A < \varliminf\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \varlimsup\limits_{x\to a} f(x) < B$, то $\exists \delta_0 > 0$: $A < f(x) < B$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение, так как 2) доказывается аналогично, а 3) — непосредственное следствие 1) и 2).

Из предположения $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) > A$ следует, что $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Если нижний предел равен $+\infty$, то по теореме 1.6 $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$. Тогда выполнение неравенства $f(x) > A$ в некоторой проколотой окрестности точки a для $A = -\infty$ очевидно, а для $A \in \mathbb{R}$ следует из определения бесконечно большой положительной при $x \to a$ функции. Если теперь $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, то, обозначив его через B, будем иметь по условию, что $B > A$. Подыщем настолько малое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы $B - \varepsilon_0 > A$. Тогда по теореме 1.8 о характеризации конечного нижнего предела $\exists \delta_0 > 0$: $f(x) \geqslant B - \varepsilon_0$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta_0)$. Тем более, $f(x) > A$ для тех же x. $\square$

1.13 *Теорема. Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty]$, $g : X \to [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X и всюду на X определена операция $f(x) + g(x)$. Тогда*

$$\varliminf_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) \geqslant \varliminf_{x\to a} f(x) + \varliminf_{x\to a} g(x), \tag{1.4}$$

$$\varlimsup_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)\leqslant \varlimsup_{x\to a} f(x)+\varlimsup_{x\to a} g(x), \tag{1.5}$$

за исключением тех случаев, когда не определена операция сложения в правых частях этих неравенств.

Доказательство. Докажем (1.5) (рассуждения для (1.4) проводятся аналогично).

Если хотя бы один из верхних пределов, стоящих в (1.5) справа, равен $+\infty$, то (1.5), очевидно, выполняется.

Если оба они равны $-\infty$, то по теореме 1.3 это означает, что $f(x)\to -\infty$ и $g(x)\to-\infty$ при $x\to a$. Тогда по свойствам бесконечно больших отрицательных при $x\to a$ функций $f(x)+g(x)\to-\infty$ при $x\to a$ и (1.5) выполнено (причём мы показали, что в рассмотренной ситуации в (1.5) стоит знак равенства).

Если один из верхних пределов в правой части (1.5) равен $-\infty$, а другой конечен, скажем, $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, а $\varlimsup\limits_{x\to a} g(x)=B\in\mathbb{R}$, то по теореме 1.3 $f(x)\to-\infty$ при $x\to a$, а по теореме 1.12 $g(x)<B+1$ в некоторой проколотой окрестности $\widetilde{U}_a(\delta_0)$ точки a. Отсюда следует, что $f(x)+g(x)\to-\infty$ при $x\to a$. В самом деле, по определению бесконечно большой отрицательной

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_1>0:\ f(x)<-\frac{1}{\varepsilon}-|B|-1,\ \forall x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta_1).$$

Полагая $\delta=\min\{\delta_1,\delta_0\}$, получим, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ f(x)+g(x)<-\frac{1}{\varepsilon}-|B|-1+B+1\leqslant-\frac{1}{\varepsilon},\ \forall x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta).$$

Значит, $f(x)+g(x)\to-\infty$ при $x\to a$, и мы снова имеем в (1.5) знак равенства.

Осталось рассмотреть последний случай, когда верхние пределы в правой части неравенства (1.5) конечны:

$$\varlimsup_{x\to a} f(x)=A\in\mathbb{R},\quad \varlimsup_{x\to a} g(x)=B\in\mathbb{R}.$$

По теореме 1.5 для любого $\varepsilon>0$ найдутся $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$:

$$f(x)\leqslant A+\varepsilon,\ \forall x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta_1);$$

$$g(x)\leqslant B+\varepsilon,\ \forall x\in X\cap\widetilde{U}_a(\delta_2).$$

При $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ выполнены оба эти неравенства, и, следовательно, для любого $\delta \in (0, \delta_3)$ $f(x) + g(x) \leqslant A + B + 2\varepsilon$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)$, а потому и

$$\sup_{x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta)} \bigl(f(x) + g(x)\bigr) \leqslant A + B + 2\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to +0$, получим, что $\varlimsup\limits_{x \to a} \bigl(f(x) + g(x)\bigr) \leqslant A + B + 2\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует (1.5). $\square$

1.14. Теорема. *Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Тогда при любом $\lambda \in (0, +\infty)$*

$$\varliminf_{x \to a} \bigl(\lambda f(x)\bigr) = \lambda \cdot \varliminf_{x \to a} f(x), \tag{1.6}$$

$$\varlimsup_{x \to a} \bigl(\lambda f(x)\bigr) = \lambda \cdot \varlimsup_{x \to a} f(x). \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем (1.6).

Если $\varliminf\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, то по теореме 1.7 это означает, что $\exists x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$: $f(x^{(n)}) \to -\infty$ при $n \to \infty$. Но тогда и $\lambda f(x^{(n)}) \to -\infty$ при $n \to \infty$ (так как $\lambda > 0$). Снова применив теорему 1.6, получим, что $\varliminf\limits_{x \to a} \bigl(\lambda f(x)\bigr) = -\infty$, т.е. в этом случае (1.6) доказано.

Если $\varliminf\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, то по теореме 1.6 $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$. Тогда и $\lambda f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, и снова получаем (1.6).

Пусть, наконец, $\varliminf\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме 1.8

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ f(x) > A - \varepsilon, \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta);$$

$$\exists \bigl\{x^{(n)}\bigr\}_{n=1}^{\infty} | \ x^{(n)} \in X, \ x^{(n)} \neq a \, (n \in \mathbb{N}), \ x^{(n)} \to a \text{ при } n \to \infty : \\ f(x^{(n)}) \to A \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \qquad \lambda f(x) > \lambda A - \lambda\varepsilon, \ \ \forall x \in X \cap \widetilde{U}_a(\delta);$$

$$\exists \bigl\{x^{(n)}\bigr\}_{n=1}^{\infty} | \ x^{(n)} \in X, \ x^{(n)} \neq a \, (n \in \mathbb{N}), \ x^{(n)} \to a \text{ при } n \to \infty : \\ \lambda f(x^{(n)}) \to \lambda A \text{ при } n \to \infty.$$

Применив снова теорему 1.8 к функции $\lambda f(x)$, получим, что

$$\underline{\lim}_{x\to a}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda A$$

(мы учитываем, что при $\lambda > 0$ $\lambda\varepsilon$ пробегает вместе с $\varepsilon > 0$ все положительные числа).

Итак, теорема полностью доказана. $\square$

1.15. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$ и $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$ для следующих функций f одной переменной и точек a:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = \infty$;

b) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $a = 0$ или $a = \infty$;

c) $f(x) = e^{1/x}$, $a = 0$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2\sin^2 x}$, $a = +\infty$.

Замечание. В теоретической части рассматривались предельные точки множества, лежащие в $\mathbb{R}^N_\infty$, т.е. фактически нижний или верхний пределы для функции одной переменной в точках $= +\infty$ и $-\infty$ не были определены (задача 4 d) касается одной из таких ситуаций). Можно для этого случая ввести соответствующее определение (по аналогии с определением 1.1) и показать справедливость всех полученных ранее результатов. Можно, однако, поступить по-другому. Именно, если, например, $+\infty$ — предельная точка множества X, то рассмотрим сужение $\widetilde{f}$ функции f на $X \cap (0, +\infty)$ и положим $\underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) := \underline{\lim}_{x\to\infty} \widetilde{f}(x)$, $\overline{\lim}_{x\to+\infty} f(x) := \overline{\lim}_{x\to\infty} \widetilde{f}(x)$. Теперь можно использовать все результаты этого раздела, не передоказывая их.

2. Обоснуйте утверждения, сформулированные в теоретической части, но не доказанные. Используйте два метода: 1) рассуждения по аналогии с проведенными для рассмотренных случаев доказательствами; 2) сведение к доказанному случаю через теорему 1.10.

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X. Обозначим через $[X, a]$ совокупность всех последовательностей $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, обладающих свойствами: $x^{(n)} \in X$, $x^{(n)} \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$. Докажите, что для любой функции $f:\ X \to \mathbb{R}$

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) := \inf\big\{\underline{\lim}_{x\to a} f(x^{(n)}) :\ \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in [X, a]\big\},$$

$$\overline{\lim_{x\to a}}\, f(x) := \sup\bigl\{\overline{\lim_{x\to a}}\, f(x^{(n)}); \bigl\{x^{(n)}\bigr\}_{n=1}^{\infty} \in [X,a]\bigr\},$$

(можно также рассматривать и функции, принимающие значения $\pm\infty$).

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X, $f : X \to \mathbb{R}$. Назовем $A \in \overline{\mathbb{R}}$ **частичным пределом** функции f в точке a, если $\exists\bigl\{x^{(n)}\bigr\}_{n=1}^{\infty} \in [X,a]$ такая, что $f(x^{(n)}) \to a$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\mathcal{F}[f,a]$ множество всех частичных пределов функции f в точке a. Докажите, что $\mathcal{F}[f,a] \neq \varnothing$ и что в $\mathcal{F}[f,a]$ имеются максимальный и минимальный элементы из $\overline{\mathbb{R}}$, которые совпадают с $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$, соответственно.

Отметим, что результат остается верным и для функций, принимающих значения $\pm\infty$.

5. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$, a — предельная точка X, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$. Докажите, что верны неравенства

$$\underline{\lim_{x\to a}}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) \leqslant \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) + \overline{\lim_{x\to a}}\, g(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to a}}\bigl(f(x) + g(x)\bigr)$$

(предполагается, что операция сложения в средней части неравенства определена).

С помощью этого результата и теорем 1.9 и 1.13 покажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$, то для любой функции f

$$\underline{\lim_{x\to a}}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

$$\overline{\lim_{x\to a}}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Исследуйте случай, когда $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$,а функции f и g могут принимать бесконечные значения.

6. Пусть $\varphi : X \to (a,b)$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{R}^N$, $a,b \in \mathbb{R}$). Пусть, далее, $x_0 \in X$ и f непрерывна и не убывает на $[a,b]$. Докажите, что

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f\bigl(\overline{\lim_{x\to x_0}}\, \varphi(x)\bigr); \quad \underline{\lim_{x\to x_0}}\, f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f\bigl(\underline{\lim_{x\to x_0}}\, \varphi(x)\bigr).$$

7. Пусть $f : [a,b) \to [0,+\infty)$, $g : [a,b) \to [0,+\infty)$, и эти функции интегрируемы по Риману на $[a,c]$ при любом $c \in (a,b)$. Докажите следующие утверждения:

a) если $\varlimsup\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} < +\infty$, то из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$;

b) если $\varliminf\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, то из расходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Запись "$x \to b-0$" при $b \in \mathbb{R}$ означает, как обычно, что x стремится к b слева, а при $b = +\infty$ — просто, что $x \to +\infty$.

2. Полунепрерывные функции

2.1. Определение. *Пусть* $f : X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Функция* f *называется* **полунепрерывной сверху в точке** x_0**,** *если*

$$\forall A > f(x_0)\ \exists \delta > 0 : \quad A > f(x),\ \forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta).$$

Функция f *называется* **полунепрерывной сверху на множестве** $X_1 \subset X$*, если она полунепрерывна сверху в каждой точке из* X_1*.*

2.2. Определение. *Пусть* $f : X \to (-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Функция* f *называется* **полунепрерывной снизу в точке** x_0**,** *если*

$$\forall A < f(x_0)\ \exists \delta > 0 : \quad A < f(x),\ \forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta).$$

Функция f *называется* **полунепрерывной снизу на множестве** $X_1 \subset X$, *если она полунепрерывна снизу в каждой точке из* X_1*.*

Замечание. Из введенных определений следует, что: 1) мы допускаем для полунепрерывных сверху (снизу) функций значения, равные $-\infty$ (соответственно, $+\infty$); 2) если x_0 — изолированная точка X, то очевидно, что всякая функция $f : X \to [-\infty, +\infty)$ (соответственно, $f : X \to (-\infty, +\infty]$) будет в этой точке полунепрерывной сверху (снизу). В связи с последним замечанием напомним, что если $f : X \to \mathbb{R}$ и x_0 — изолированная точка X, то f непрерывна в x_0. Поэтому в последующем будем считать, не ограничивая общности, что рассматриваемые множества не имеют изолированных точек, т.е. все точки из X — предельные для X.

2.3. Теорема. *Пусть* $f: X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Для того чтобы f была полунепрерывной сверху в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы функция $-f$ была в ней полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f полунепрерывна сверху в точке x_0. Зафиксируем любое $A < -f(x_0)$. Тогда $-A > f(x_0)$ и по определению 2.1 $\exists \delta > 0$: $-A > f(x)$, $\forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta)$, или, что то же самое, $\exists \delta > 0$: $A < -f(x)$, $\forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta)$. Применив к функции $-f$ определение 2.2, получаем её полунепрерывность снизу в x_0.

Достаточность доказывается аналогично. $\square$

Замечание. Теорема 2.3 позволяет доказывать результаты для полунепрерывных сверху функций, а затем выводить их аналоги для полунепрерывных снизу как следствия. Поэтому в дальнейшем все рассуждения проводятся только для полунепрерывных сверху функций.

2.4. Теорема. *Пусть* $f: X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Для того чтобы f была полунепрерывной сверху в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0). \tag{2.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть f полунепрерывна сверху в точке x_0. Зафиксируем любое $A > f(x_0)$. По определению 2.1 $\exists \delta > 0$: $A > f(x)$, $\forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta)$. Тогда $\sup\{f(x) : x \in X \cap U_{x_0}(\sigma)\} \leqslant A$, $\forall \sigma \in (0, \delta)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\sigma \to +0$, получим (в соответствии с определением 1.1 верхнего предела), что $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant A$. В силу произвольности $A > f(x_0)$ отсюда следует справедливость (2.1).

Достаточность. Пусть выполнено (2.1). Зафиксируем произвольное $A > f(x_0)$. По теореме 1.12 (утверждение 2)) $\exists \delta > 0$: $f(x) < A$, $\forall x \in X \cap \widetilde{U}_{x_0}(\delta)$. Так как в точке x_0 неравенство $f(x_0) < A$ выполнено, то получаем, что $\exists \delta > 0$: $f(x) < A$, $\forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta)$. В соответствии с определением 2.1 f полунепрерывна сверху в x_0. $\square$

2.5. Теорема. *Пусть* $f: X \to (-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Для того чтобы f была полунепрерывной снизу в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0). \tag{2.2}$$

2.6. Теорема. *Пусть* $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Для того чтобы f была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была в ней полунепрерывна и сверху, и снизу.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f непрерывна в точке x_0. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме 1.9

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \varlimsup_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

и, следовательно, выполнены условия (2.1) и (2.2). По теоремам 2.4 и 2.5 f полунепрерывна в x_0 и сверху, и снизу.

Достаточность. Пусть теперь f полунепрерывна в x_0 и сверху, и снизу. Тогда по теоремам 2.4 и 2.5 выполнены (2.1) и (2.2). Так как всегда $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)$, то получаем:

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant \varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Отсюда следует, что $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме 1.9 заключаем, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. f непрерывна в x_0. $\square$

2.7. Теорема. *Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty)$, $g : X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. Если f и g полунепрерывны сверху в точке x_0, то при любых фиксированных $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ функция $\lambda f + \mu g$ полунепрерывна сверху в точке x_0.*

Доказательство. По теореме 2.4 $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$, $\varlimsup\limits_{x \to x_0} g(x) \leqslant g(x_0)$. Тогда по теоремам 1.13 и 1.14

$$\varlimsup_{x \to x_0} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) \leqslant \varlimsup_{x \to x_0} \big(\lambda f(x)\big) + \varlimsup_{x \to x_0} \big(\mu g(x)\big) =$$

$$= \lambda \varlimsup_{x \to x_0} f(x) + \mu \varlimsup_{x \to x_0} g(x) \leqslant \lambda f(x_0) + \mu g(x_0).$$

Снова применив теорему 2.4, получаем, что функция $\lambda f + \mu g$ полунепрерывна сверху в x_0. $\square$

Следствие 1. *Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty)$, $g : X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. Если f и g полунепрерывны сверху в точке x_0, то функция $f + g$ также полунепрерывна сверху в точке x_0.*

Следствие 2. *Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. Если $f(x)$ полунепрерывна сверху в точке x_0, то при любом $\lambda > 0$ функция $\lambda f(x)$ также полунепрерывна сверху в точке x_0.*

2.8. Теорема. *Пусть* $f : X \to (-\infty, +\infty]$, $g : X \to (-\infty, +\infty]$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Если* f *и* g *полунепрерывны снизу в точке* x_0, *то при любых фиксированных* $\lambda > 0$ *и* $\mu > 0$ *функция* $\lambda f + \mu g$ *полунепрерывна снизу в точке* x_0. *В частности, полунепрерывными снизу в* x_0 *будут функции* λf *и* $f + g$.

2.9. Теорема. *Пусть* $f_j : X \to [-\infty, +\infty)$, $j = 1, \ldots, n$, n — *фиксированное натуральное число,* $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Если все эти функции полунепрерывны сверху в точке* x_0, *то и функция* $\varphi(x) := \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(x)$, $x \in X$, *также полунепрерывна сверху в точке* x_0.

Доказательство. Поскольку набор рассматриваемых функций конечен, то $\varphi : X \to [-\infty, +\infty)$. Пусть $A > \varphi(x_0)$. Тогда $A > f_j(x_0)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. По условию все f_j полунепрерывны сверху в x_0. Отсюда в соответствии с определением 2.1 имеем:

$$\exists \delta_j > 0 : \quad A > f_j(x), \ \forall x \in X \cap U_{x_0}(\delta_j), \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Положив $\delta = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \delta_j$ (очевидно, что $\delta > 0$), получаем тогда, что при $x \in X \cap U_{x_0}(\delta)$ все неравенства $A > f_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняются одновременно. Поэтому в силу конечности набора функций заключаем, что для всех таких x $A > \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(x) = \varphi(x)$. По определению 2.1 φ полунепрерывна сверху в точке x_0. $\square$

2.10. Теорема. *Пусть* $f_j : X \to (-\infty, +\infty]$, $j = 1, \ldots, n$, n — *фиксированное натуральное число,* $X \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in X$. *Если все эти функции полунепрерывны снизу в точке* x_0, *то и функция* $\varphi(x) := \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(x)$, $x \in X$, *также полунепрерывна снизу в точке* x_0.

2.11. Теорема. *Всякая полунепрерывная сверху на компакте из* $\mathbb{R}^N$ *функция ограничена на нём сверху и достигает на нём своей точной верхней грани.*

Доказательство. Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty)$, X — компакт в $\mathbb{R}^N$ и f полунепрерывна сверху на X. Напомним, что компактом в $\mathbb{R}^N$ называется всякое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$.

1. Предположим, рассуждая от противного, что f не ограничена сверху на X, т.е. $\exists \{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$: $x^{(n)} \in X$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ и $f(x^{(n)}) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Так как X — компакт, то по теореме Больцано–Вейерштрасса имеется такая подпоследовательность $\{x^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$, что $x^{(n_j)} \to x_0 \in X$ при $j \to \infty$. Далее,

$f(x^{(n_j)}) \to +\infty$ при $j \to \infty$ и, следовательно, по теореме 1.4 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = +\infty$. С другой стороны, $f(x_0) < +\infty$ по условию. Значит, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) > f(x_0)$, что противоречит (в силу теоремы 1.4) полунепрерывности f в точке x_0 сверху.

2. Пусть $M = \sup\limits_{x\in X} f(x)$. В силу проведенных только что рассуждений $M < +\infty$. Сразу отбросим тривиальный случай, когда $f(x) \equiv -\infty$ на X (т.е. когда $M = -\infty$), и рассмотрим $M \in \mathbb{R}$. По характеристическому свойству точной верхней грани $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in X$, и

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x^{(n)} \in X : \quad f(x^{(n)}) > M - \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует по теореме о трех последовательностях, что $f(x^{(n)}) \to M$ при $n \to \infty$. Поступая далее так же, как в п.1 доказательства, получим, что $\exists\{x^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$: $x^{(n_j)} \to x_0 \in X$ при $j \to \infty$. Тогда $f(x^{(n_j)}) \to M$ при $j \to \infty$. Отсюда (с учетом уже отмеченного неравенства $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in X$) следует по теореме 1.5, что $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = M$. По теореме 2.4 $M \leqslant f(x_0)$, а это возможно лишь в том случае, когда $M = f(x_0)$. $\square$

2.12. Теорема. *Всякая полунепрерывная снизу на компакте из $\mathbb{R}^N$ функция ограничена на нём снизу и достигает на нём своей точной нижней грани.*

Замечание. Теоремы 2.11 и 2.12 являются, очевидно, аналогами известных 1–й и 2–й теорем Вейерштрасса об ограниченности и достижении своих точных верхней и нижней граней функцией, непрерывной на компакте.

2.13. Примеры. Приведём два простейших примера полунепрерывных сверху и снизу функций. Несмотря на свою простоту, они являются модельными и позволят лучше понять природу полунепрерывности, а также помогут при решении задач.

1) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \forall x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1], \\ 1, \ x = 1/2, \end{cases}$$

(изобразите её график!). Очевидно, что f непрерывна в каждой точке из $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$. Далее, $\exists \lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = 0$. Поэтому $\underline{\lim\limits_{x\to 1/2}} f(x) = 0 < 1 = f(1/2)$, и f не является полунепрерывной снизу в точке $x_0 = 1/2$ по теореме 2.5. В то же время $\overline{\lim\limits_{x\to 1/2}} f(x) = 0 < 1 = f(1/2)$ и по теореме 2.4 f полунепрерывна сверху в точке $x_0 = 1/2$.

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \forall x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1], \\ -1, \ x = 1/2 \end{cases}$$

в соответствии с предыдущим примером и теоремой 2.3 полунепрерывна снизу в точке $x_0 = 1/2$ и не является в ней полунепрерывной сверху.

2.14. Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать на полунепрерывность снизу и сверху функции (определенные на $\mathbb{R}$):

a) $f(x) = sgn\, x$;

b) $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x;

c) $f(x) = \{x\} = x - [x]$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x;

$$d)\ f(x) = \begin{cases} 1/n, \text{ если } x = m/n, \text{ где } m \text{ и } n \text{ не имеют общих делителей}, \\ \qquad\qquad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}; \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число или } x = 0\ . \end{cases}$$

2. Докажите результаты, приведенные в разделе 2 без доказательства.

3. По следствию 1 теоремы 2.7 и теореме 2.8 если f и g — две полунепрерывные сверху (снизу) в точке x_0 функции, то и $f+g$ также полунепрерывна сверху (соответственно, снизу) в x_0 (подразумевается, что f и g имеют одну и ту же область определения). Исследуйте, справедливы ли аналоги этих результатов для разности $f - g$.

Каково необходимое условие того, что из полунепрерывности сверху (снизу) функции f в точке x_0 следует полунепрерывность сверху (снизу) обеих функций $f \pm g$ в этой точке одновременно?

4. Покажите, что требование о конечности набора функций в теоремах 2.9 и 2.10 существенно для справедливости сформулированных в них результатов.

Именно, покажите, что если $\{f_j : j \in J\}$ — набор полунепрерывных сверху (снизу) в точке x_0 функций, где J — множество индексов, содержащее бесконечное число элементов, то функция $\Phi(x) := \sup\limits_{j \in J} f_j(x)$ (соответственно, $\varphi(x) := \inf\limits_{j \in J} f_j(x)$) уже не обязательно полунепрерывна сверху (снизу). При этом "не спасает" даже предположение о конечности всех f_j.

5. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность полунепрерывных сверху (снизу) на множестве X функций, принимающих на X только конечные

значения. Докажите, что если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f(x)$ полунепрерывна сверху (соответственно, снизу) на X.

6. Докажите, что всякая неубывающая непрерывная справа на интервале (a, b) функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху на (a, b) (напомним, что f называется непрерывной справа в точке $x_0 \in (a, b)$, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для полунепрерывных снизу функций.

7. Пусть $\varphi : X \to (a, b)$ $(X \subset \mathbb{R}^N,\ a, b \in \mathbb{R})$ — полунепрерывная сверху на X функция; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная и неубывающая на $[a, b]$ функция. Докажите, что функция $f \circ \varphi$ полунепрерывна сверху на X.

Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для полунепрерывных снизу функций.

8. Пусть $f : X \to [-\infty, +\infty)$, $X \subset \mathbb{R}^N$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) f полунепрерывна сверху на X;

(ii) для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X : f(x) < a\}$ открыто в топологии, индуцированной в X из $\mathbb{R}^N$;

(iii) для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X : f(x) \geqslant a\}$ замкнуто в топологии, индуцированной в X из $\mathbb{R}^N$.

Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для полунепрерывных снизу функций.

Указание. Множество $M \subset X$ называется **открытым** в топологии, индуцированной в X из $\mathbb{R}^N$, если

$$\forall x \in M \implies \exists \delta > 0 : \quad U_x(\delta) \cap X \subset M.$$

Множество $M \subset X$ называется **замкнутым** в этой же топологии, если $X \setminus M$ в ней открыто. По определению считается, что пустое множество и всё X и открыты, и замкнуты в этой топологии.

9. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная сверху на $\mathbb{R}^N$ функция. Докажите, что тогда и функция $f^*(x) := \max\{f(x + y) : |y| \leqslant 1\}$, $x \in \mathbb{R}$, полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^N$.

Литература

1. Абанин А.В., Налбандян Ю.С. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1998. – 28 с.

2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

3. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: Наука, 1971. – 430 с.

4. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

6. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Наука, 1984. – 592 с.

7. Макаров Б.М. и др. Избранные задачи по вещественному анализу. – М.: Наука, 1992. – 432 с.