МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В.АБАНИН, Ю.С.НАЛБАНДЯН

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Методические указания по математическому анализу
для студентов 1–2 курсов
механико-математического факультета РГУ

Ростов-на-Дону, 1998

.

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Данные методические указания предназначены для студентов 2 курса механико-математического факультета РГУ. Содержат теоретический материал и различные примеры практического характера. Могут также использоваться преподавателями при выборе заданий для учебных курсовых работ.

Методические указания печатаются в соответствии с решением кафедры математического анализа Ростовского государственного университета, протокол N 5 от 12 января 1998 года.

Содержание

Настоящие методические указания посвящены теории верхних и нижних пределов последовательностей вещественных чисел. В них подробно излагается теоретический материал и даются примеры решения задач практического содержания. Указания разбиты на три раздела: "Частичные пределы числовой последовательности", "Верхний и нижний пределы последовательности" и "Свойства верхних и нижних пределов". В конце каждого раздела приводятся задачи для самостоятельного решения. Они разделены на три группы в соответствии с уровнем сложности ("*" — первый уровень, "**" — второй, "***" - третий) и расположены в порядке возрастания сложности. Задачи можно использовать на практических занятиях по математическому анализу, а часть из них — для учебных курсовых работ. Нумерация всех утверждений соответствует нумерации пунктов и разделов, и ссылка "Теорема 1.7" означает теорему из пункта 1.7 раздела 1.

1. Частичные пределы числовой последовательности

1.1. Множество $\overline{\mathbb{R}}$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}}$ множество $\mathbb{R}$, дополненное двумя бесконечно удаленными точками $-\infty$ и $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Естественно считать, что $-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Тогда для любых двух элементов $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и $y \in \overline{\mathbb{R}}$ имеет место одно из двух неравенств $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, а если предположить, что $x \neq y$, то одно из строгих неравенств $x < y$ или $y < x$. Таким образом, $\overline{\mathbb{R}}$ вместе с введенным отношением порядка является упорядоченным множеством. Это обстоятельство позволяет точно так же, как и для $\mathbb{R}$, вводить и исследовать понятия верхней и нижней граней, точной верхней и нижней граней, максимального и минимального элементов множества из $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2. Определение. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется* **верхней гранью** непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если $x \leqslant \alpha$, $\forall x \in X$. Далее, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ называется **нижней гранью** непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если $\beta \leqslant x$, $\forall x \in X$.

Замечание. Совокупность всех верхних (нижних) граней произвольного непустого множества из $\overline{\mathbb{R}}$ всегда содержит $+\infty$ (соответственно, $-\infty$) и, следовательно, не пуста.

1.3. Определение. $M \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется* **точной верхней гранью** *непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если одновременно выполняются два условия: 1) M — верхняя грань X; 2) любое $\alpha < M$ не является верхней гранью X. Точная верхняя грань X обозначается символом* $\sup X$.

Далее, $m \in \overline{\mathbb{R}}$ называется **точной нижней гранью** *непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если одновременно выполняются два условия: 1) m — нижняя грань X; 2) любое $\beta > m$ не является нижней гранью X. Точная нижняя грань X обозначается символом* $\inf X$.

Замечание. Аналитически определения $\sup X$ и $\inf X$ формулируются так:

$$M = \sup X \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \leqslant M \\ \forall \alpha < M \quad \exists x \in X |\, x > \alpha; \end{cases}$$

$$M = \inf X \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \geqslant m \\ \forall \beta > m \quad \exists x \in X |\, x < \beta. \end{cases}$$

1.4. Предложение. *Любое непустое множество из $\overline{\mathbb{R}}$ имеет, и притом единственную, точную верхнюю и точную нижнюю грани.*

Доказательство. Рассмотрим все логически возможные случаи.

1) $+\infty \in X$. Ясно, что тогда $\sup X = +\infty$.

2) $-\infty \in X$. Так же, как в 1), $\inf X = -\infty$.

3) $X = \{+\infty\}$. Тогда $\inf X = \sup X = +\infty$.

4) $X = \{-\infty\}$. Тогда $\inf X = \sup X = -\infty$.

5) $+\infty \notin X$,$-\infty \in X$, $X \neq \{-\infty\}$. Тогда X содержит хотя бы одну точку из $\mathbb{R}$. Положим $X_1 = X \setminus \{-\infty\}$. Тогда $X_1 \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, и по теореме о существовании точной верхней грани произвольного непустого множества из $\mathbb{R}$ $\exists \sup X_1 \in \overline{\mathbb{R}}$. Очевидно, что $\sup X_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. По замечанию из п. 1.3 выполняются условия:

$$\forall x \in X_1 \qquad x \leqslant \sup X_1; \tag{1}$$

$$\forall \alpha < \sup X_1 \qquad \exists x \in X_1 : \ x > \alpha. \tag{2}$$

Так как $-\infty \leqslant \sup X_1$ и X отличается от X_1 только на элемент $-\infty$, то (1) выполнено и для X. Далее, $X \supset X_1$, поэтому выполнение для X условия (2) очевидно. Снова привлекая замечание из п. 1.3, получаем, что $\sup X = \sup X_1$ и, следовательно, $\sup X$ существует. По 2) $\inf X = -\infty$.

6) $-\infty \notin X$,$+\infty \in X$, $X \neq \{+\infty\}$. Из рассуждений, аналогичных проведенным в 5), следует, что $\inf X$ существует и равен $\inf(X \setminus \{+\infty\})$, а $\sup X = +\infty$.

7) Остается единственная возможность, когда $-\infty \notin X$, $+\infty \notin X$. Тогда $X \subset \mathbb{R}$ и по теореме о существовании точной верхней и точной нижней грани произвольного непустого множества из $\mathbb{R}$ существуют $\inf X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и $\sup X \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

В любом из рассмотренных случае единственность точных граней очевидна. Именно, если бы, например, $\sup X = M_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\sup X = M_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, где $M_1 \neq M_2$, то либо $M_1 < M_2$, либо $M_2 < M_1$. Тогда бы, к примеру, в случае $M_1 < M_2$ по замечанию из п. 1.3, примененному к $M = M_2$ и $\alpha = M_1$, существовал бы элемент $x \in X$ такой, что $x > M_1$, а это противоречит тому, что $M_1 = \sup X$ — верхняя грань X. $\square$

1.5. Определение. *Говорят, что элемент $x_1 \in X$ ($x_2 \in X$) является* **минимальным (максимальным) элементом** множества $X \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\forall x \in X \quad x \geqslant x_1$ (соответственно, $x \leqslant x_2$).

Замечания. 1) Очевидно, что если X имеет минимальный элемент $x_1 \in X$, то $x_1 = \inf X$. Аналогично, если X имеет максимальный элемент $x_2 \in X$, то $x_2 = \sup X$.

2) Так же, как и в случае множеств из $\mathbb{R}$, не всякое множество из $\overline{\mathbb{R}}$ имеет минимальный и (или) максимальный элементы. Достаточно вспомнить примеры, приводимые обычно для множеств вещественных чисел, а именно: $X = (0,1)$, $X = [0,1)$, $X = (0,1]$. Можно также рассмотреть теперь (после введения $\overline{\mathbb{R}}$) такие примеры: $X = \mathbb{R}$, $X = [0,+\infty)$, $X = (-\infty, 0]$.

1.6. Определение. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется* **частичным пределом** этой последовательности, если имеется такая её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем обозначать символом $\mathcal{P}(\{x_n\})$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только последовательности вещественных чисел. Поэтому всякий раз, когда мы в последующем имеем какую-либо последовательность, подразумевается, если не оговорено дополнительно, что она состоит из вещественных чисел.

1.7. Предложение. *Множество частичных пределов произвольной последовательности вещественных чисел не пусто. В аналитической записи это утверждение выглядит так: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\ \mathcal{P}(\{x_n\}) \neq \varnothing$.*

Замечание. Это утверждение представляет собой переформулировку обобщенной теоремы Больцано–Вейерштрасса, согласно которой из всякой последовательности вещественных чисел можно выделить подпоследовательность, имеющую предел, равный либо $-\infty$, либо $+\infty$, либо числу из $\mathbb{R}$.

1.8. Предложение. *Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда в любой её окрестности содержится бесконечное число членов из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. В аналитической записи: $\forall\, U_a$ множество $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in U_a\}$ бесконечно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $a \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. По определению это означает, что существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. По определению предела числовой последовательности $\forall U_a$

$\exists N \in \mathbb{N}: \; x_{n_k} \in U_a, \forall k > N$. Тогда в U_a содержатся, по крайней мере, члены исходной последовательности с номерами n_{N+1}, n_{N+2}, ... , число которых бесконечно.

Достаточность. Пусть, обратно, в любой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ содержится бесконечное число элементов из $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. В соответствии с этим в $U_a(1)$ находится бесконечное число членов этой последовательности. Зафиксируем один из них и обозначим его через x_{n_1}. Так как в $U_a(1/2)$ также содержится бесконечное число элементов $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, то найдется $n_2 \in \mathbb{N}: \; n_2 > n_1$ и $x_{n_2} \in U_a(1/2)$. Продолжив этот процесс, мы получим, что имеются номера n_k $(k = 1, 2, \ldots)$такие, что $n_1 < n_2 < \ldots$ и $x_{n_k} \in U_a(1/k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ и, следовательно, $a \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. $\square$

Замечания. 1) В доказательстве достаточности мы воспользовались стандартными обозначениями ε–окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$:

для $a \in \mathbb{R}$ $\quad U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: \; |x - a| < \varepsilon\}$;
для $a = -\infty$ $\quad U_{-\infty}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: \; x < -1/\varepsilon\}$;
для $a = +\infty$ $\quad U_{+\infty}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: \; x > 1/\varepsilon\}$.

2) Напомним ещё, почему из условия $x_{n_k} \in U_a(1/k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Если $a \in \mathbb{R}$, то это условие означает, что $a - 1/k < x_{n_k} < a + 1/k$ при $k = 1, 2, \ldots$ Так как $a - 1/k \to a$ и $a + 1/k \to a$ при $k \to \infty$, то по теореме о трех последовательностях $x_{n_k} \to a$ при $k \to \infty$. Если $a = +\infty$, то условие примет следующий вид: $x_{n_k} > k$ при $k = 1, 2, \ldots$ Поскольку $\left\{k\right\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечно большая положительная последовательность, то тогда и $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ также будет бесконечно большой положительной последовательностью, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty = a$. Аналогично рассматривается случай $a = -\infty$.

1.9. Теорема. *Для произвольной последовательности $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ имеет максимальный и минимальный элементы. В аналитической записи: $\forall \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\sup \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \mathcal{P}(\{x_n\})$ и $\inf \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \mathcal{P}(\{x_n\})$.*

Доказательство. По предложению 1.7 $\mathcal{P}(\{x_n\})$ не пусто и, значит, по предложению 1.4 имеются $\sup \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\inf \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \overline{\mathbb{R}}$. Если множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ состоит из конечного числа различных точек из $\overline{\mathbb{R}}$, скажем, $a_1, \ldots, a_m$, то их можно упорядочить по возрастанию. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что $a_1 < \cdots < a_m$. Тогда

$$\inf \mathcal{P}(\{x_n\}) = \inf\{a_1, \ldots, a_m\} = a_1 \in \mathcal{P}(\{x_n\}),$$
$$\sup \mathcal{P}(\{x_n\}) = \sup\{a_1, \ldots, a_m\} = a_m \in \mathcal{P}(\{x_n\}).$$

Таким образом, в этом случае утверждение теоремы справедливо.

Остается рассмотреть ситуацию, когда $\mathcal{P}(\{x_n\})$ состоит из бесконечного числа элементов. Покажем, что $\sup \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \mathcal{P}(\{x_n\})$ (второе утверждение теоремы доказывается аналогично). Так как $\mathcal{P}(\{x_n\})$ содержит более одной точки, то $M := \sup \mathcal{P}(\{x_n\}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Возьмем любую окрестность $U_M(\varepsilon)$ точки M и зафиксируем любое $\alpha < M$, $\alpha \in U_M(\varepsilon/2)$ (заметим, что при $M = -\infty$ это было бы невозможно). По определению 1.3 (см. замечание к нему) существует $a \in \mathcal{P}(\{x_n\})$ такое, что $a > \alpha$. Ясно, что $a \leqslant M$. По предложению 1.8 в окрестности $U_a(\varepsilon/2)$ лежит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как $U_a(\varepsilon/2) \subset U_M(\varepsilon)$, то все они лежат и в $U_M(\varepsilon)$. Итак, при любом $\varepsilon > 0$ в $U_M(\varepsilon)$ находится бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По предложению 1.8 $M \in \mathcal{P}(\{x_n\})$, что и требовалось доказать. $\square$

1.10. Теорема. *Множество частичных пределов данной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из одной точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда эта последовательность имеет предел, равный a (в аналитической записи: $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a\} \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда по известным свойствам последовательности, имеющей предел, любая её подпоследовательность имеет предел, равный a. Следовательно, других частичных пределов, кроме a, у $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нет (здесь используется единственность предела из $\overline{\mathbb{R}}$). Поэтому $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a\}$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a\}$. Предположим, рассуждая от противного, что $x_n \nrightarrow a$ при $n \to \infty$. Тогда, по известной геометрической интерпретации этого факта, вне некоторой окрестности $U_a(\varepsilon_0)$ точки a ($\varepsilon_0 > 0$) расположено бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Они составляют её подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. По предложению 1.7, примененному к $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathcal{P}(\{x_{n_k}\}) \neq \varnothing$, т.е. имеются $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ и $b \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = b$. Поскольку $x_{n_{k_j}} \notin U_a(\varepsilon_0)$, $j = 1, 2, \ldots$, то $b \neq a$. Далее, так как $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $b \in \mathcal{P}(\{x_n\})$ по определению 1.6, а это противоречит исходному условию, что $\mathcal{P}(\{x_n\})$ состоит ровно из одной точки a. Следовательно, наше предположение было неверным, и $x_n \to a$ при $n \to \infty$. $\square$

1.11. Под **разбиением** последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на подпоследовательности $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, где j соответствует номеру подпоследовательности, мы будем подразумевать то, что каждый член исходной последовательности попадает в одну и только в одну из этих подпоследовательностей.

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ может быть разбита на конечное число, скажем, m ($m \in \mathbb{N}$), подпоследовательностей, имеющих пределы $a_1, \ldots, a_m$, то $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

Доказательство. По определению 1.6 частичных пределов $a_j \in \mathcal{P}(\{x_n\})$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому остается доказать, что в $\mathcal{P}(\{x_n\})$ нет точек из $\overline{\mathbb{R}}$, отличных от a_j, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b \neq a_j$, $j = 1, \ldots, m$. Так как в $\overline{\mathbb{R}}$ произвольная пара различных точек обладает непересекающимися окрестностями и точек у нас конечное число (а именно $m+1$), то имеются окрестности $U_b(\varepsilon_0)$, $U_{a_j}(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, такие, что $U_b(\varepsilon_0) \cap U_{a_j}(\varepsilon_0) = \varnothing$. Пусть соответствующее утверждению теоремы разбиение исходной последовательности имеет вид $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \{x_{n_k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $x_{n_k}^{(j)} \to a_j$ при $k \to \infty$. При этом каждый член исходной последовательности попадает в одну и только в одну из её подпоследовательностей $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ ($j = 1, \ldots, m$). По геометрическому смыслу предела последовательности вне $U_{a_j}(\varepsilon_0)$ располагается лишь конечное число членов из $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ ($j = 1, \ldots, m$). Значит, так как у нас конечное число таких окрестностей $U_{a_j}(\varepsilon_0)$, а именно m, то вне них всех располагается лишь конечное число членов подпоследовательностей $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ ($j = 1, \ldots, m$). А поскольку они полностью охватывают исходную последовательность, то вне всех $U_{a_j}(\varepsilon_0)$ лежит конечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, в $U_b(\varepsilon_0)$ попадет также конечное число членов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По предложению 1.8 $b \notin \mathcal{P}(\{x_n\})$. Теорема доказана. $\square$

1.12. Примеры. В приводимых ниже примерах требуется найти множество частичных пределов данных последовательностей.

1) $x_n = 1/n,\ n = 1, 2, \ldots$
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, то по теореме 1.10 $\mathcal{P}(\{1/n\}) = \{0\}$.

2) $x_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, \ldots$
Эту последовательность можно разбить на две подпоследовательности $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \to -1$ при $k \to \infty$ и $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \to 1$ при $k \to \infty$. По теореме 1.11 $\mathcal{P}(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$.

3) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — занумерованная в каком-либо порядке последовательность всех рациональных чисел из $(0, 1)$. Докажем, что $\mathcal{P}(\{x_n\}) = [0, 1]$.

Пусть $a \in [0,1]$. Если $a = 0$, то в любой окрестности $U_0(\varepsilon)$ точки 0 лежат все рациональные числа вида $1/k$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k > 1/\varepsilon$, которых бесконечно много и которые являются членами $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По предложению 1.8 $0 \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. Аналогично, рассматривая рациональные числа вида $1 - 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, показываем, что $1 \in \mathcal{P}(\{x_n\})$.

Пусть теперь $a \in (0,1)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим $\delta = \min\{\varepsilon,\, a,\, 1-a\}$. Очевидно, что $\delta > 0$ и $(a-\delta,\, a+\delta) \subset (0,1)$. По свойству плотности множества рациональных чисел во множестве вещественных имеется рациональное число $r \in (a - \delta/2,\, a + \delta/2)$. Тогда рациональные числа вида $r \pm 1/k$, где $k > 2/\delta$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат $(a-\delta,\, a+\delta)$ и, следовательно, $(0,1)$ и $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$. Таким образом, в произвольную ε–окрестность точки a попадает бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По предложению 1.8 $a \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. Итак, $\mathcal{P}(\{x_n\}) \supset [0,1]$.

Докажем, что $b \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0,1]$ не может быть элементом $\mathcal{P}(\{x_n\})$. В самом деле, любая такая точка b имеем окрестность, не пересекающуюся с $[0,1]$ и, тем более, с $(0,1)$. Значит, в этой окрестности нет ни одного члена $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, и по предложению 1.8 $b \notin \mathcal{P}(\{x_n\})$.

Итак, в силу проведенных рассуждений, $\mathcal{P}(\{x_n\}) = [0,1]$.

При постановке задачи 3) указывалось, что множество рациональных чисел интервала $(0,1)$ может быть занумеровано в виде одной последовательности (такое множество называется **счетным**). Это можно сделать, например, так (стрелками показана последовательность нумерации):

$$
\begin{array}{l}
1/2 \\[2ex]
1/3 \longrightarrow 2/3 \\[2ex]
1/4 \longrightarrow 3/4 \\[2ex]
1/5 \longrightarrow 2/5 \longrightarrow 3/5 \longrightarrow 4/5 \\[2ex]
\;\dots
\end{array}
$$

1.13. Резюме. Подведем итоги, выделив место и значение некоторых из полученных результатов.

Предложение 1.8 является геометрической интерпретацией того, что данная точка из $\overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел последовательности. Оно, по существу, выступает главным инструментом исследования частичных пределов как в теории, так и в наиболее сложных примерах.

Теорема 1.9 имеет принципиальное значение при изучении верхних и нижних пределов последовательностей, которые будут рассматриваться в следующих разделах.

Теорема 1.10 дает критерий существования предела последовательности через структуру множества частичных пределов.

Теорема 1.11 имеет большое практическое значение в примерах, в которых требуется найти множество частичных пределов и, как мы увидим в последующем, при вычислении верхних и нижних пределов последовательностей.

Примеры, рассмотренные в п.1.12, показывают, что множества $\mathcal{P}(\{x_n\})$ могут иметь весьма разнообразную структуру: в примерах 1) и 2) $\mathcal{P}(\{x_n\})$ состоит их конечного числа точек (одной и двух); в примере 3) $\mathcal{P}(\{x_n\})$ представляет собой целый отрезок $[0,1]$. Можно привести примеры последовательностей, для которых их множество частичных пределов совпадает с $\overline{\mathbb{R}}$ (см. ниже задачу 5**).

1.14. Задачи для самостоятельного решения.

1*. Найти множество частичных пределов следующих последовательностей:

a) $\left\{(-1)^n \frac{2n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\left\{\sqrt[n]{2+4^{(-1)^n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\left\{2^{n(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\left\{\frac{1+(-1)^n n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

e) $\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

f) $\left\{\frac{((-1)^n-1)2^n}{2^n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

g) $\left\{\frac{(1+\cos \pi n)n+\lg n}{\lg(2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

h) $\left\{\sin \frac{\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

i) $\left\{\frac{n^2}{n+1}\cos \frac{2\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

k) $\left\{(-1)^n+\cos \frac{\pi n}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2*. Пусть $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — какая-либо подпоследовательность последовательности $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Докажите, что $\mathcal{P}(\{x_{n_k}\}) \subset \mathcal{P}(\{x_n\})$ (т.е. покажите, что всякий частичный предел подпоследовательности некоторой последовательности будет также частичным пределом всей этой последовательности).

3*. Докажите, что при отбрасывании или изменении конечного числа элементов последовательности множество её частичных пределов не меняется.

4**. Найдите множество частичных пределов следующих последовательностей:

a) $\left\{n-3[\frac{n}{3}]\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $[x]$ — целая часть $x \in \mathbb{R}$;

b) $\{\sin n^o\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{\sin(\pi \frac{p}{q} n)\}_{n=1}^{\infty}$, где числа $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$ фиксированы и не имеют общих делителей.

5**. Пусть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — занумерованная в каком-либо порядке последовательность всех рациональных чисел из $\mathbb{R}$ (укажите способ какой-либо нумерации!). Докажите, что $\mathcal{P}(\{q_n\}) = \overline{\mathbb{R}}$.

6**. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — какая-либо перестановка натурального ряда (т.е. взаимно однозначное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$). Докажите, что $\mathcal{P}(\{x_{\sigma(n)}\}) = \mathcal{P}(\{x_n\})$ (другими словами, при любой перестановке членов последовательности множество частичных пределов не меняется).

7**. Условимся, что для произвольного a из $\mathbb{R}$

$(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$;
$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$;
$X + a = \{x + a : x \in X\}$ для произвольного множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Докажите, что $\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathcal{P}(\{x_n + a\}) = \mathcal{P}(\{x_n\}) + a$.

8**. Условимся, что для $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$
$\lambda \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \lambda = +\infty$ и $\lambda \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \lambda = -\infty$ при $\lambda > 0$;
$\lambda \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \lambda = -\infty$ и $\lambda \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \lambda = +\infty$ при $\lambda < 0$;
$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$ для произвольного множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что $\mathcal{P}(\{\lambda x_n\}) = \lambda \mathcal{P}(\{x_n\})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Выведите отсюда, что $\mathcal{P}(\{-x_n\}) = -\mathcal{P}(\{x_n\})$.

9**. Условимся, что $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$ и $|X| = \{|x| : x \in X\}$, где X — произвольное множество из $\overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что $\mathcal{P}(\{|x_n|\}) = |\mathcal{P}(\{x_n\})|$.

10***. Найти множество частичных пределов последовательностей:

$$a) \left\{ \frac{(-1)^{[\lg n]}}{2 + (-1)^n} \right\}_{n=1}^{\infty}; \quad b) \left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \right\}_{n=1}^{\infty}; \quad c) \left\{ \sqrt{n} \frac{(n-1)!!}{n!!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(по определению $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-3) \cdot (2m-1)$ и $(2m)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m-2) \cdot 2m$, где $m \in \mathbb{N}$).

11***. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — какая-либо последовательность. Ассоциируем с ней множество, элементами которого являются члены этой последовательности, $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Какова взаимосвязь между множеством частичных пределов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множеством предельных точек X? Укажите условия, при которых они совпадают.

12***. Докажите, что верно обращение теоремы 1.11. Именно, если множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из конечного числа различных точек из $\overline{\mathbb{R}}$, скажем, $a_1, \dots, a_m$, то последовательность может быть разбита на m подпоследовательностей $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x_{n_k}^{(j)} \to a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Таким образом, имеет место следующий критерий: $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a_1, \dots, a_m\}$, где $a_j \in \overline{\mathbb{R}}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ разбивается на m подпоследовательностей $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x_{n_k}^{(j)} \to a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

13***. Ясно, что если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ разбита на бесконечное число своих подпоследовательностей $\{x_{n_k}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \dots$ и $x_{n_k}^{(j)} \to a_j \in \overline{\mathbb{R}}$ $(j = 1, 2, \dots)$, то $\mathcal{P}(\{x_n\}) \supset \{a_1, a_2, \dots\}$. Приведите пример, когда $\mathcal{P}(\{x_n\}) \neq \{a_1, a_2, \dots\}$.

14***. Назовем $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **предельной точкой** множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в произвольной окрестности этой точки имеется хотя бы один элемент $x \in X$, $x \neq a$. Далее, множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ назовем **замкнутым** в $\overline{\mathbb{R}}$, если оно содержит все свои предельные точки.

Докажите, что для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.

15***. С помощью предыдущей задачи исследуйте, каким условием должна удовлетворять последовательность точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\overline{\mathbb{R}}$, при которых для нее существует последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a_1, a_2, \dots\}$. Докажите для последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих найденным условиям, аналог критерия из задачи 12***.

16***. Докажите, что множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ является множеством частичных пределов какой-либо последовательности тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Верхний и нижний предел последовательности

2.1. Определение. *Наибольший из частичных пределов данной последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется её* **верхним пределом** и обозначается символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Наименьший из частичных пределов данной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется её **нижним пределом** и обозначается символом $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Замечания. 1) В соответствии с теоремой 1.9 для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ имеет максимальный и минимальный элементы. Поэтому любая последовательность имеет верхний и нижний предел. При этом

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{P}(\{x_n\}), \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{P}(\{x_n\}).$$

2) В силу определения всегда $-\infty \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant +\infty$.

2.2. Теорема. *Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Эквивалентны утверждения:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*;*

(ii) $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a\}$*;*

(iii) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$*.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (i) и (ii) составляет содержание теоремы 1.10.

Пусть выполнено (ii). Тогда $\inf \mathcal{P}(\{x_n\}) = \sup \mathcal{P}(\{x_n\}) = a$ или, что то же самое, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Значит, (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Пусть, обратно, выполнено (iii). Тогда по определению 2.1 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не может иметь частичных пределов, отличных от a, т.е. $\mathcal{P}(\{x_n\}) = \{a\}$. Следовательно, (iii) $\Longrightarrow$ (ii).

Итак, (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), что завершает доказательство. $\square$

Следствие. Для того чтобы последовательность имела предел в $\overline{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали между собой её верхний и нижний пределы.

2.3. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*.*

Доказательство. Пусть выполнено (i). Так как всегда

$$-\infty \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. По теореме 2.2 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Таким образом, (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Справедливость обратной импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) следует непосредственно из теоремы 2.2. $\square$

2.4. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*;*

(ii) существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*, что* $x_{n_k} \to +\infty$ *при* $k \to \infty$*;*

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть выполнено (i). Тогда в соответствии с теоремой 1.9 и определением 2.1 $+\infty \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. По определению 1.6 частичного предела это означает, что выполнено (ii). Значит, (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Выполнение (ii) означает, что $+\infty \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. Ясно, что тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Т.е. (ii) $\Longrightarrow$ (i) и, следовательно, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

Равносильность утверждений (ii) и (iii) — не что иное, как констатация известной взаимосвязи между бесконечно большими положительными и неограниченными сверху последовательностями. $\square$

2.5. Чтобы получить характеризацию последовательностей, имеющих верхним пределом данное вещественное число, требуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $x_n \to \xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *при* $n \to \infty$*. Тогда верны следующие утверждения:*

1) если, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant a$*, где* $-\infty \leqslant a < +\infty$*, то* $\xi \geqslant a$*;*

2) если, начиная с некоторого номера, $x_n \leqslant b$*, где* $-\infty < b \leqslant +\infty$*, то* $\xi \leqslant b$*;*

3) если, начиная с некоторого номера, $x_n \in \Pi(a, b)$*, где* $\Pi(a, b)$ *— промежуток вещественной оси с концами* a *и* b*, то* $a \leqslant \xi \leqslant b$*.*

Доказательство. 1) Если $a = -\infty$, то неравенство $\xi \geqslant a = -\infty$ очевидно. Пусть теперь $a \in \mathbb{R}$. Сразу отметим, что тогда $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. В самом деле, если бы $\xi = -\infty$, то по определению того, что $x_n \to \xi = -\infty$ при $n \to \infty$, мы бы получили, что, начиная с некоторого номера, $x_n < -|a| - 1 < a$. А это противоречит тому, что по условию $x_n \geqslant a$, начиная с некоторого номера. Итак, при $a \in \mathbb{R}$ $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Если $\xi = +\infty$, то неравенство $\xi \geqslant a = -\infty$ очевидно. Если же $\xi \in \mathbb{R}$, то по теореме о переходе к пределу в неравенствах для сходящихся последовательностей из условий, что $x_n \geqslant a \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x_n \to \xi \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$, следует, что $\xi \geqslant a$. Итак, в любом случае $\xi \geqslant a$.

2) Это утверждение доказывается аналогично 1).

3) Условие, что $x_n \in \Pi(a, b)$, влечет выполнение неравенства $a \leqslant x_n \leqslant b$ независимо от того, включаются концы a и b в $\Pi(a, b)$ или нет. Поэтому справедливость утверждения 3) следует непосредственно из 1) и 2) $\square$

Лемма 2. *Пусть $x_n \to \xi \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$. Если, начиная с некоторого номера, $x_n \leqslant y_n$, то $\xi \leqslant \eta$.*

Доказательство. Если $\xi = -\infty$, то неравенство $\xi \leqslant \eta$ очевидно. Аналогично, оно выполняется при $\eta = +\infty$

Если $\xi = +\infty$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая положительная последовательность. Тогда из условия $x_т \leqslant y_n$, $\forall n > N$ ($N \in \mathbb{N}$ фиксировано) следует, что и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $\eta = +\infty = \xi$. Точно так же рассматривается случай $\eta = -\infty$ (покажите, что тогда и $\xi = -\infty$).

Остается рассмотреть ситуацию, когда $\xi \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}$. Но в этом случае утверждение леммы — не что иное, как известная теорема о переходе к пределу в неравенствах для сходящихся последовательностей. $\square$

Замечание. Леммы 1 и 2, очевидно, обобщают теоремы о переходе к пределу в неравенствах, известные для сходящихся последовательностей, на случай, когда последовательности могут иметь пределы, равные $-\infty$, $+\infty$ или, как и раньше, конечному числу.

Лемма 3. *Пусть $\Pi(a, b)$ — какой–либо промежуток вещественной оси с концами a и b ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). Если в этот промежуток попадает бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то имеется $\xi \in \mathcal{P}(\{x_n\})$ такая, что $a \leqslant \xi \leqslant b$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — множество номеров тех членов последовательности, которые попали в $\Pi(a, b)$. Обозначим через n_1 минимальный из номеров $\mathcal{K}$, через n_2 минимальный из $\mathcal{K} \setminus \{n_1\}$ и т.д. Поскольку среди номеров членов последовательности нет одинаковых, то $n_1 < n_2 < \ldots$. Так как по условию $\mathcal{K}$ содержит бесконечное число элементов, то этот процесс можно продолжать до бесконечности. Тогда члены последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, попавшие в $\Pi(a, b)$, составят подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. По предложению 1.7 о непустоте множества частичных пределов $\mathcal{P}(\{x_n\}) \neq \varnothing$. Пусть ξ — какой-либо из его элементов. Это означает, что имеется такая подпоследовательность $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $x_{n_{k_j}} \to \xi$ при $j \to \infty$. Так как одновременно $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ — подпоследовательность исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\xi \in \mathcal{P}(\{x_n\})$.

Далее, поскольку $x_{n_k} \in \Pi(a, b)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $a \leqslant x_{n_{k_j}} \leqslant b$, $j = 1, 2, \ldots$ По лемме 1 $a \leqslant \xi \leqslant b$, что и требовалось доказать. $\square$

Основным результатом пункта является

Теорема. *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

$$(i)\ \varlimsup_{n\to\infty} x_n = a;$$

$$(ii):\ \begin{cases} (ii_1)\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \ x_n \leqslant a+\varepsilon,\ \forall n>N; \\ (ii_2)\ \exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:\ \ x_{n_k}\to a, k\to\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть, сначала, выполнено (i). По определению 2.1 верхнего предела и теореме 1.9 $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. Тогда по определению 1.6 частичного предела выполняется (ii_2). Чтобы доказать импликацию $(i) \Longrightarrow (ii_1)$, предположим, рассуждая от противного, что (ii_1) не выполнено. Это означает, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ в интервале $(a+\varepsilon_0, a+\infty)$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По лемме 3 $\exists\xi \in \mathcal{P}(\{x_n\})\ :\ \ a+\varepsilon_0 \leqslant \xi \leqslant +\infty$. По определению 2.2 верхнего предела $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a+\varepsilon_0$, чего не может быть. Значит, наше предположение было неверным и, следовательно, $(i) \Longrightarrow (ii_1)$. Итак, $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Пусть, обратно, выполнено (ii). Рассмотрим произвольную точку ξ из $\mathcal{P}(\{x_n\})$. Из условия (ii_1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за исключением конечного числа (зависящего от ε), попадают в промежуток $(-\infty, a+\varepsilon]$. Тогда по лемме 3 $\xi \leqslant a+\varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\xi \leqslant a$. Итак, $\forall\xi \in \mathcal{P}(\{x_n\})\ \xi \leqslant a$. Значит, и $\sup\mathcal{P}(\{x_n\}) \leqslant a$. С другой стороны, условие (ii_2) означает в соответствии с определением 1.6 частичного предела, что $a \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. Таким образом, a — максимальный элемент $\mathcal{P}(\{x_n\})$, т.е. $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Значит, $(ii) \Longleftrightarrow (i)$. $\square$

Аналогично теоремам 2.3–2.5 доказываются подобные им результаты для нижних пределов.

2.6. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2.7. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;

(ii) $\exists\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}:\ x_{n_k} \to -\infty$ *при* $k\to\infty$;

(iii) $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *не ограничена снизу.*

2.8. Теорема. *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

$$(i)\ \varliminf_{n\to\infty} x_n = a;$$

$$(ii):\ \begin{cases} (ii_1)\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \ x_n \geqslant a-\varepsilon,\ \forall n>N; \\ (ii_2)\ \exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:\ \ x_{n_k}\to a, k\to\infty. \end{cases}$$

Замечание. Условие (ii_2) в теоремах 2.5 и 2.8 может быть переформулировано в соответствии с предложением 1.8 так: в любой окрестности точки a находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.9. Примеры. Приведем сначала основные правила вычисления верхних и нижних пределов.

Правило 1. Сначала находим множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ частичных пределов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а затем определяем в нем максимальный и минимальный элементы. Они и будут, соответственно, верхним и нижним пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Это правило применяется, в основном, тогда, когда множество $\mathcal{P}(\{x_n\})$ состоит из конечного числа элементов, т.е. тогда, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ разбивается на конечное число подпоследовательностей, имеющих пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ (в частности, когда $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n\to\infty$).

Правило 2. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела в $\overline{\mathbb{R}}$.

Чтобы найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, достаточно применить теоремы 2.4–2.5, доказав, что имеет место один из двух нижеперечисленных случаев:

1) если $\exists\ \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k}\to+\infty$ при $k\to\infty$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

2) если найти $\alpha\in\mathbb{R}$ такое, что для него $\exists\,\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k}\to\alpha$ при $k\to\infty$ (или, что то же самое, в любой окрестности α находится бесконечно много членов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) и

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \ x_n\leqslant\alpha+\varepsilon,\ \forall n>N, \tag{1}$$

то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$. В частности, условие (1) заведомо выполнено, если, начиная с некоторого номера, $x_n\leqslant\alpha$.

Чтобы найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, достаточно применить теоремы 2.7–2.8, доказав, что имеет место один из таких двух случаев:

1) если $\exists\ \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k}\to-\infty$ при $k\to\infty$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$;

2) если найти $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что для него $\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \to \beta$ при $k \to \infty$ (или, что то же самое, в любой окрестности β находится бесконечно много членов $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$) и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ x_n \geqslant \beta - \varepsilon, \forall n > N, \tag{2}$$

то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. В частности, условие (2) заведомо выполнено, если, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant \beta$.

Правило 2, конечно, эффективнее, чем правило 1. Оно позволяет не находить полное описание множества $\mathcal{P}(\{x_n\})$, которое может содержать и бесконечное число элементов. Однако при его применении нужно фактически "угадать" значение верхнего или нижнего пределов — и в этом его слабость по сравнению с правилом 1.

Приведем примеры на применение сформулированных правил, воспользовавшись задачами, решенными в п. 1.12.

1) $x_n = 1/n, \ n = 1, 2, \ldots$
Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, то по теореме 2.2 $\varliminf\limits_{n\to\infty} 1/n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

2) $x_n = (-1)^n, \ n = 1, 2, \ldots$
Как было показано в п. 1.12, $\mathcal{P}(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$. Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1.$$

3) $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — занумерованная в каком-либо порядке последовательность рациональных чисел из $(0, 1)$. Как было установлено в соответствующем примере п.1.12, $\mathcal{P}(\{x_n\}) = [0, 1]$ и, следовательно, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, а $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Рассмотрим теперь другое решение этого примера , основанное на применении правила 2. По условию $0 < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Далее, в любой ε–окрестности точки 0 лежит бесконечно много членов $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, например, все $1/k$ при $k > 1/\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Аналогично, в любой ε–окрестности точки 1 лежит бесконечно много членов $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, например, все $1 - 1/k$ при $k > 1/\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Проиллюстрируем применение правила 2 еще на одном примере.

4) $x_n = \cos\frac{\pi n}{4}$, $n = 1, 2, \ldots$

Очевидно, что $-1 \leqslant \cos\frac{\pi n}{4} \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Далее, при $n = 4(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, $\cos\frac{\pi n}{4} = \cos(2k-1)\pi = -1$, т.е. подпоследовательность $\left\{\cos\frac{4(2k-1)\pi}{4}\right\}_{k=1}^{\infty}$

стремится к -1 при $k \to \infty$. Значит, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi n}{4} = -1$. Аналогично, взяв $n = 8k$, $k \in \mathbb{N}$, получим, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi n}{4} = 1$.

2.10. Резюме. Теорема 2.2 — критерий существования предела последовательности в $\overline{\mathbb{R}}$ через её верхний и нижний пределы. Теоремы 2.3–2.8 дают полную характеризацию того, когда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$. В п. 2.9 приведены правила, которые часто используются на практике для нахождения верхних и нижних пределов.

2.11. Задачи для самостоятельного решения.

1*. Воспользовавшись решениями примеров a)–k) задачи 1* из п.1.14, найти верхние и нижние пределы соответствующих последовательностей.

2*. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ для следующих последовательностей:

$$a)\left\{\frac{(-1)^n 3^n}{2^n+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty};\quad b)\left\{(-1)^n+\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty};\quad c)\left\{arctg\big(n(-1)^n\big)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

3**. Воспользовавшись решениями примеров a)–c) задачи 4** из п.1.14, найти верхние и нижние пределы соответствующих последовательностей.

4**. Сформулируйте и докажите через верхний и нижний пределы последовательности понятия её ограниченности сверху, снизу и ограниченности.

5***. Воспользовавшись решениями примеров a)–c) задачи 10*** из п.1.14, найти верхние и нижние пределы соответствующих последовательностей.

6***. Сформулируйте и докажите критерий того, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ (соответственно, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n < \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$).

7***. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность. Обозначим $\overline{X}_k = \sup\limits_{n\geqslant k} x_n$ (возможно, $\overline{X}_k = +\infty$), $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что в $\overline{\mathbb{R}}$ всегда существует $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{X}_k$ (подразумевается, что предел последовательности в $\overline{\mathbb{R}}$, состоящей из одних только символов "$+\infty$", равен $+\infty$) и он равен $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Аналогично, обозначим $\underline{X}_k = \inf\limits_{n\geqslant k} x_n$ (возможно, $\underline{X}_k = -\infty$), $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что в $\overline{\mathbb{R}}$ всегда существует $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{X}_k$ (подразумевается, что предел последовательности в $\overline{\mathbb{R}}$, состоящей из одних только символов "$-\infty$", равен $-\infty$) и он равен $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Результат этой задачи можно сформулировать так:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} x_n.$$

В связи с этим в научной и учебной литературе для верхнего и нижнего пределов часто используются отличные от принятых нами обозначения, а именно: **для верхнего предела** $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$**, для нижнего предела** $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$**.**

8***. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Пусть, далее, $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажите, что $\mathcal{P}(\{x_n\}) = [a, b]$. Приведите пример такой последовательности с некоторыми a и b, $a < b$.

3. Свойства верхних и нижних пределов

3.1. Предложение. *При отбрасывании конечного числа членов последовательности её верхний и нижний предел не меняются.*

Доказательство.. Справедливость предложения следует непосредственно из утверждения задачи 3* п. 1.14, в соответствии с которым при отбрасывании из последовательности конечного числа членов множество её частичных пределов останется неизменным. Тогда прежними при этой операции будут наименьший и наибольший элементы этого множества, т.е. верхний и нижний пределы. $\square$

3.2. Теорема. *Если, начиная с некоторого номера,* $x_n \leqslant y_n$, *то*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{1}$$

Доказательство. Проведем рассуждения только для нижних пределов, поскольку второе неравенство доказывается аналогично.

По предложению 3.1 нижние пределы последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не изменяются после отбрасывания конечного числа их членов, поэтому можно считать, не ограничивая общности, что $x_n \leqslant y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Введем обозначения: $\beta_x = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\beta_y = \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$. По определению 2.1 нижнего предела $\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $y_{n_k} \to \beta_y$ при $k \to \infty$. Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. По предложению 1.7 о непустоте множества частичных пределов произвольной последовательности $\exists \beta \in \mathcal{P}(\{x_{n_k}\})$, т.е. по определению 1.6 частичного предела $\exists\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$: $x_{n_{k_j}} \to \beta$ при $j \to \infty$. Так как $y_{n_k} \to \beta_y$ при $k \to \infty$, то и любая её подпоследовательность стремится к β_y. В частности, $y_{n_{k_j}} \to \beta_y$ при $j \to \infty$. Переходя с помощью леммы 2 из п. 2.5 к пределу при $j \to \infty$ в неравенстве $x_{n_{k_j}} \leqslant y_{n_{k_j}}$, $j = 1, 2, \ldots$, которое выполняется по условию, получим, что $\beta \leqslant \beta_y$. Далее, так как $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $x_{n_{k_j}} \to \beta$ при $j \to \infty$, то $\beta \in \mathcal{P}(\{x_n\})$. По определению 2.1 нижнего предела $\beta_x \leqslant \beta$. Подводя итог, заключаем, что $\beta_x \leqslant \beta_y$. $\square$

Замечание. Из теоремы следует, что если, начиная с некоторого номера, выполняется строгое неравенство $x_n < y_n$, то для нижних и верхних пределов соответствующих последовательностей можно гарантировать выполнение нестрогих неравенств (1). Точно так же, как и в случае сходящихся последовательностей, имеются примеры $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, но $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$ и (или) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$. Приведите такие примеры самостоятельно.

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant a$, *где* $a \in \mathbb{R}$, *то* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$;

2) если, начиная с некоторого номера, $x_n \leqslant b$, *где* $b \in \mathbb{R}$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$;

3) если, начиная с некоторого номера, $a \leqslant x_n \leqslant b$, *где* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, *то* $a \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$.

Доказательство. Пусть, например, $x_n \geqslant a$, $\forall n > N$. Рассмотрим стационарную последовательность $\{a, a, \ldots\}$. Для нее $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и по теореме 2.2 (критерию существования предела последовательности) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a = a$. Переходя в неравенстве $x_n \geqslant a$ $(n > N)$ к нижнему пределу при $n \to \infty$, получим, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$. Таким образом, утверждение 1) верно. Аналогично доказывается 2). Утверждение 3) непосредственно следует из 1) и 2). $\square$

3.3. Теорема. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < a$, *то* $\exists N \in \mathbb{N}$: $x_n < a$, $\forall n > N$;

2) если $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > a$, *то* $\exists N \in \mathbb{N}$: $x_n > a$, $\forall n > N$.

Доказательство. Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < a$. Рассмотрим два возможных случая:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \alpha \in \mathbb{R}$. В первом по теореме 2.3 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Тогда по определению бесконечно большой отрицательной последовательности для $\varepsilon_0 = \frac{1}{|a|+1} > 0$ $\exists N$: $x_n < -1/\varepsilon_0 = -|a| - 1$, $\forall n > N$. Так как $-|a| - 1 < a$, то $x_n < a$, $\forall n > N$, и мы получаем требуемое.

Во втором случае, когда $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha < a$, подыщем настолько малое $\varepsilon_0 > 0$, что $\alpha + \varepsilon_0 < a$. По теореме 2.5 $\exists N$: $x_n < a + \varepsilon_0$, $\forall n > N$. Тем более, $x_n < a$, $\forall n > N$, и утверждение 1) полностью доказано.

Аналогично доказывается 2). $\square$

3.4. Условимся, что для любого $a \in \mathbb{R}$

$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$; $\qquad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$;

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Операции $(+\infty) + (-\infty)$ и $(-\infty) + (+\infty)$ не определены.

Теорема. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольные последовательности. Тогда*

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n, \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n,$$

кроме тех случаев, когда операции в правых частях этих неравенств не определены.

Доказательство. Проведем его лишь для верхних пределов (для нижних рассуждения аналогичны). Введем обозначения:

$$\alpha_x = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n, \quad \alpha_y = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n, \quad \alpha_{x+y} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n).$$

Если $\alpha_x = +\infty$ или $\alpha_y = +\infty$, то автоматически (так как по доказываемому утверждению не может случиться, что $\alpha_x = +\infty$, а $\alpha_y = -\infty$, и наоборот), $\alpha_x + \alpha_y = +\infty$, и требуемое неравенство $\alpha_{x+y} \leqslant \alpha_x + \alpha_y$, очевидно, выполнено.

Если $\alpha_x = \alpha_y = -\infty$, то по теореме 2.3 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большие отрицательные последовательности. Тогда и $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность. Снова применив теорему 2.3, получим, что $\alpha_{x+y} = -\infty$.

Пусть $\alpha_x = -\infty$, а $\alpha_y \in \mathbb{R}$. Тогда по теоремам 2.4 (для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) и 2.5 (для $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая отрицательная, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная сверху последовательность. Следовательно, $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность. Таким образом, $\alpha_{x+y} = -\infty$, и получаем, что $\alpha_{x+y} = \alpha_x + \alpha_y$. Случай $\alpha_y = -\infty$, $\alpha_x \in \mathbb{R}$ рассматривается аналогично.

Остается исследовать ситуацию, когда $\alpha_x \in \mathbb{R}$ и $\alpha_y \in \mathbb{R}$. При этом по теореме 2.5 $\forall \varepsilon > 0$ существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$x_n < \alpha_x + \varepsilon,\ \forall n > N_1 \quad \text{и} \quad y_n < \alpha_y + \varepsilon,\ \forall n > N_2.$$

При $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ оба неравенства выполняются одновременно и, следовательно, $x_n + y_n < \alpha_x + \alpha_y + 2\varepsilon$. Переходя к верхнему пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$, получим в соответствии со следствием теоремы 3.2 $\alpha_{x+y} \leqslant \alpha_x + \alpha_y + 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $\alpha_{x+y} \leqslant \alpha_x + \alpha_y$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. В отличие от теоремы об арифметических операциях со сходящимися последовательностями неравенства из теоремы 3.4 могут быть строгими. Например, пусть $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = -1$, а $\varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0$. В следующей теореме выделены дополнительные условия, при которых упомянутые неравенства превращаются в равенства.

3.5. Теорема. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n; \quad \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n$$

для произвольной последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Снова рассмотрим только случай верхних пределов, вводя, как и выше, обозначения

$$\alpha_{x+y} = \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n), \quad \alpha_y = \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \quad \alpha_x = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

(последнее равенство — в силу теоремы 2.2). Точно так же, как при доказательстве теоремы 3.4, получаем, что если $\alpha_y = -\infty$, то и $\alpha_{x+y} = -\infty$. Далее, если $\alpha_y = +\infty$, то по теореме 2.4 $\exists \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $y_{n_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она ограничена. Тем более будет ограничена и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. По свойствам положительных бесконечно больших $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечно большая положительная последовательность, т.е. $+\infty \in \mathcal{P}(\{x_n + y_n\})$ и по определению 2.1 верхнего предела $\alpha_{x+y} = +\infty$. Итак, $\alpha_y = -\infty \Longrightarrow \alpha_{x+y} = -\infty$; $\alpha_y = +\infty \Longrightarrow \alpha_{x+y} = +\infty$. Значит, в этих случаях $\alpha_{x+y} = \alpha_x + \alpha_y$.

Пусть теперь $\alpha_y \in \mathbb{R}$. По теореме 3.4 $\alpha_{x+y} \leqslant \alpha_x + \alpha_y$. Следовательно, чтобы установить справедливость доказываемого утверждения, достаточно проверить выполнение противоположного неравенства. По теореме

2.5 $\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $y_{n_k} \to \alpha_y$ при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. По условию $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к α_x. Тогда и любая её подпоследовательность также сходится к α_x. В частности, $x_{n_k} \to \alpha_x$ при $k \to \infty$. Применив к последовательностям $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_{n_k} + y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ теорему об арифметических операциях со сходящимися последовательностями, получим, что $x_{n_k} + y_{n_k} \to \alpha_x + \alpha_y$. Таким образом, по определению 1.6 частичного предела $\alpha_x + \alpha_y \in \mathcal{P}(\{x_n + y_n\})$, а тогда по определению 2.1 верхнего предела $\alpha_{x+y} \geqslant \alpha_x + \alpha_y$. Но тогда $\alpha_{x+y} = \alpha_x + \alpha_y$. $\square$

3.6. Условимся, что при $\lambda > 0$

$$\lambda \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \lambda = +\infty; \qquad \lambda \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \lambda = -\infty.$$

Далее,

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty; \; (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Операции $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$ не определены.

Теорема. *Если, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \big(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\big) \cdot \big(\varlimsup_{n\to\infty} y_n\big),$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) \geqslant \big(\varliminf_{n\to\infty} x_n\big) \cdot \big(\varliminf_{n\to\infty} y_n\big),$$

кроме тех случаев, когда операции в правых частях не определены.

Доказательство. Проведем рассуждения для первого из неравенств (второе обосновывается по той же схеме).

В соответствии с предложением 3.1 можно считать, не ограничивая общности, что $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как и ранее, введем обозначения: $\alpha_{xy} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n)$, $\alpha_y = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$, $\alpha_x = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. По следствию из теоремы 3.2 $\alpha_{xy} \geqslant 0$, $\alpha_x \geqslant 0$, $\alpha_y \geqslant 0$.

Если $\alpha_x = +\infty$, то $\alpha_y > 0$ (иначе операция в правой части первого неравенства не определена). Следовательно, $\alpha_x \alpha_y = +\infty$ и очевидно, что неравенство $\alpha_{xy} \leqslant \alpha_x \alpha_y = +\infty$ выполняется. Аналогично рассматривается случай $\alpha_y = +\infty$.

Пусть теперь $\alpha_x < +\infty$, $\alpha_y < +\infty$. По теореме 2.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся N_1 и N_2 из $\mathbb{N}$ такие, что $x_n \leqslant \alpha_x + \varepsilon$ при любом $n > N_1$ и $y_n \leqslant \alpha_y + \varepsilon$ при любом $n > N_2$. Тогда при $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ выполнены оба эти неравенства, и в силу неотрицательности x_n и y_n $x_n y_n \leqslant (\alpha_x + \varepsilon)(\alpha_y + \varepsilon) = \alpha_x \alpha_y + \varepsilon(\alpha_x + \alpha_y + \varepsilon)$.

Переходя здесь к верхнему пределу при $n \to \infty$, получим в соответствии со следствием теоремы 3.2, что $\alpha_{xy} \leqslant \alpha_x\alpha_y + \varepsilon(\alpha_x + \alpha_y + \varepsilon)$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и конечности α_x и α_y следует, что $\alpha_{xy} \leqslant \alpha_x\alpha_y$. $\square$

Замечание. Как и в теореме 3.4, в неравенствах из теоремы 3.6 может не быть равенств. Например, пусть $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$, $y_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 3/2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = 1/2$, а $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 3/4$.

3.7. Теорема. *Пусть, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$. Пусть, далее, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)\Big(\varlimsup_{n\to\infty} y_n\Big);$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)\Big(\varliminf_{n\to\infty} y_n\Big),$$

за исключением случая, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, а $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ или, соответственно, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Доказательство. Как и прежде, не ограничивая общности, считаем, что $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, и полагаем

$$\alpha_{xy} = \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n), \quad \alpha_y = \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \quad \alpha_x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Пусть сначала $\alpha_y = +\infty$. Тогда $\alpha_x > 0$ (иначе операция $\alpha_x\alpha_y$ не определена). По теореме 2.4 $\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $y_{n_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и её предел положителен (в частности, может быть равен $+\infty$), то она отграничена от нуля. Её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ тогда также отграничена от нуля, и по свойствам бесконечно больших $\{x_{n_k}y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечно большая положительная последовательность. Т.е. $x_{n_k}y_{n_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$, и по определению 1.6 частичного предела $+\infty \in \mathcal{P}(\{x_n y_n\})$. Отсюда по определению 2.1 верхнего предела заключаем, что $\alpha_{xy} = +\infty$. Таким образом, $\alpha_{xy} = +\infty = \alpha_x \cdot (+\infty) = \alpha_x \cdot \alpha_y$.

Пусть теперь $\alpha_y < +\infty$ (напоминаем, что всегда $\alpha_y \geqslant 0$). По теореме 3.6 $\alpha_{xy} \leqslant \alpha_x\alpha_y$. Далее, по теореме 2.5 $\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $y_{n_k} \to \alpha_y$ при $k \to \infty$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к α_x, то и любая её подпоследовательность сходится к α_x. В частности, $x_{n_k} \to \alpha_x$ при $k \to \infty$. По теореме об арифметических действиях со сходящимися последовательностями $x_{n_k}y_{n_k} \to \alpha_x\alpha_y$ при $k \to \infty$.

По определению 1.6 частичного предела $\alpha_x\alpha_y \in \mathcal{P}(\{x_n y_n\})$, и в соответствии с определением 2.1 верхнего предела, $\alpha_{xy} \geqslant \alpha_x \cdot \alpha_y$. Итак, $\alpha_{xy} = \alpha_x \cdot \alpha_y$.

Аналогично рассматривается случай нижних пределов. $\square$

Следствие. *Если* $\lambda > 0$ *и* $x_n \geqslant 0$, *начиная с некоторого номера, то* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$; $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

3.8. Теорема. *Для произвольной последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$$

или, что одно и то же,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n).$$

Доказательство. Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$. По теореме 2.7 $\exists\ \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \to -\infty$ при $k \to \infty$. Ясно, что $-x_{n_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. По определению 1.6 частичного предела $+\infty \in \mathcal{P}(\{-x_n\})$, и, следовательно, в соответствии с определением 2.1, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = +\infty$. Итак,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty = -(+\infty) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n).$$

Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, то по теореме 2.6 $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда $-x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ и по теореме 2.2 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$. Поэтому $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty = -(-\infty) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)$.

Наконец, пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n =: \beta \in \mathbb{R}$. По теореме 2.8 о характеризации конечного нижнего предела выполнены два условия:

$$\begin{cases} 1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \ x_n \geqslant \beta - \varepsilon,\ \forall n > N, \\ 2)\ \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:\ \ x_{n_k} \to \beta \text{ при } k \to \infty. \end{cases}$$

Тогда выполнены также условия

$$\begin{cases} 1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ -x_n \leqslant -\beta + \varepsilon,\ \forall n > N, \\ 2)\ \exists \{-x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:\ -x_{n_k} \to -\beta \text{ при } k \to \infty, \end{cases}$$

означающие по теореме 2.5 о характеризации конечного верхнего предела, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\beta$. Итак, снова $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \beta = -(-\beta) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)$. $\square$

Замечание. Доказанная теорема позволяет в теоремах 3.2–3.7 проводить рассуждения только для верхних пределов, получая из этого соответствующие утверждения для нижних как следствия, или наоборот. Например, в теореме 3.4 получаем:

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n-y_n) \geqslant -\Big(\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) + \varlimsup_{n\to\infty}(-y_n)\Big) =$$
$$= -\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) - \varlimsup_{n\to\infty}(-y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Конечно, здесь рассматриваются только ситуации, когда операции сложения определены.

3.9. Задачи для самостоятельного решения.

1*. Докажите по аналогии с рассмотренными те утверждения теорем 3.2–3.7, доказательства которых были опущены.

2*. Пусть $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажите эквивалентность утверждений:

(i) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3**. Докажите, что $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ во всех случаях, когда определена операция сложения в средней части неравенства.

4**. Докажите, что если $x_n > 0$, начиная с некоторого номера, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n}$ или, что то же самое, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}$ (по соглашению $\frac{1}{+0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$).

5**. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$, начиная с некоторого номера. Докажите, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant \big(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\big) \cdot \big(\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\big) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n)$ во всех случаях, когда определена операция умножения в средней части неравенства.

6***. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фиксированная ограниченная последовательность. Докажите, что если для любой последовательности $\{\,y_n\,\}_{n=1}^{\infty}$ с конечным верхним пределом выполняется равенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Аналогичное утверждение справедливо и для нижних пределов.

7***. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фиксированная положительная ограниченная последовательность. Докажите, что если для любой положительной последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечным верхним пределом выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = \big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n\big) \cdot \big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n\big)$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Аналогичное утверждение справедливо и для нижних пределов.

Литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Т.1. Начальный курс. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — М.: Наука, 1970. – 608 с.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. — 624 с.

5. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Наука, 1984. – 592 с.

6. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т.1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.