МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.С.НАЛБАНДЯН

О задаче Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

Ростов-на-Дону, 2001

.

Набрано в системе $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13 марта 2001 г., N 650-B01

П.1. Определения и обозначения. Данная работа продолжает начатые в [1] исследования задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами с неизвестными функциями $u_k(x,t)$. Рассуждения опираются на применение разработанной Ю.Ф.Коробейником теории абсолютно представляющих систем. В связи с этим автор статьи считает необходимым выразить искреннюю признательность профессору Ю.Ф.Коробейнику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Пусть Γ — область изменения переменной t. Для рассматриваемого случая Γ — непрерывная ограниченная простая незамкнутая спрямляемая кривая, содержащая начало координат и оба своих конца.

В [1] исследовались различные так называемые $t-$ базовые пространства — полные отделимые локально выпуклые пространства (ПОЛВП) над полем скаляров $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, элементами которых являются непрерывные на Γ функции, а топология этих пространств мажорирует топологию μ_Γ, задаваемую набором преднорм $p_L(y) = \max\{|y(t)| : t \in L\}$, где L — любой компакт Γ. В данной работе в качестве $t-$ базового рассматривается $C(\Gamma)$ — пространство функций, непрерывных на Γ, с топологией равномерной сходимости на компактах.

Как и в [1], предполагается, что Γ обладает свойством (S): если $\varphi \in C(\Gamma)$, то $\forall t \in \Gamma$, $\forall t_0 \in \Gamma$ $\varphi(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau\right)'_t$, причем интеграл берется по той части кривой, которая соединяет точки t и t_0. В частности, этому требованию удовлетворяет любая выпуклая дуга. В [2] приведено и другое условие, гарантирующее выполнение этого свойства, а именно: $\forall t_0 \in \Gamma$ $\limsup\limits_{t \to t_0} \frac{s(t_0,t)}{|t_0 - t|} = L(t_0) < +\infty$, где $s(t_0,t)$ — длина $\Gamma(t_0,t)$.

Свойство (S) обеспечивает выполнение в $C(\Gamma)$ теоремы о почленном дифференцировании абсолютно сходящихся рядов: если $\forall n \geqslant 1$ $g_n(t)$ и $g'_n(t)$ из $C(\Gamma)$, c_n — вещественные или комплексные числа, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g'_n$ сходятся абсолютно в $C(\Gamma)$ и g, g_1, соответственно, их суммы, то $\forall t \in \Gamma$ $g_1(t) = g'(t)$.

Далее, в качестве области, где изменяется переменная x, выбираем Q — выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant 1)$. Введем $\left\{E_{(t)}\right\}_{t\in\Gamma}$ —

семейство ПОЛВП (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) функций, определенных на Q. Это семейство должно обладать следующими свойствами:

1) $E_{(0)} \hookrightarrow E_{(t)}$, $\forall t \in \Gamma$;

2) $\forall t \in \Gamma$ топология в $E_{(t)}$ мажорирует топологию μ_Q;

3) каждый оператор $\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ частного дифференцирования определен на $E_{(t)}$ и действует непрерывно из $E_{(t)}$ в $E_{(t)}$).

Как отмечено в [1, стр.6], последнее свойство можно определить как инвариантность семейства $\{E_{(t)}\}_{t\in\Gamma}$ относительно дифференцирования по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Всюду далее считаем, что поле скаляров одно и то же для всех $E_{(t)}$, $t \in \Gamma$.

П.2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для системы n линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестными функциями $u_k(x,t)$, определенными на декартовом произведении $Q \times \Gamma$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (при $n \geqslant 1$):

$$\begin{cases} P_k(\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,k}(t) P_{j,k}(\frac{\partial}{\partial x}) u_j(x,t) + D_k(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_k(x,0) = \varphi_k(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $P_k(\frac{\partial}{\partial x})$ и $P_{j,k}(\frac{\partial}{\partial x})$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и соответствующими символами — многочленами $P_k(x)$ и $P_{j,k}(x)$; $a_{j,k}(t)$ — мультипликаторы t–базового пространства (для рассматриваемого случая $C(\Gamma)$ $a_{j,k}(t) \in C(\Gamma)$); функции $\varphi_k(x)$ и $D_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы из $E_{(0)}$.

Решение системы (1) ищем в виде $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t))$, где $u_k(x,t)$ принадлежат классу $\{E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)\}$ — множеству всех определенных на $Q \times \Gamma$ функций $v(x,t)$ таких, что $\forall t \in \Gamma$ $v(x,t) \in E_{(t)}$; $\forall x \in Q$ $v(x,t) \in C(\Gamma)$. При этом необходимо, чтобы $\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} \in \{E_{(t)}, t \in \Gamma; C(\Gamma)\}$.

Предполагаем, что в $E_{(0)}$ имеется абсолютно представляющая система экспонент $\mathcal{E}_\Lambda = \{\exp\langle\lambda_l, x\rangle\}_{l=1}^{\infty}$, где $\lambda_l = (\lambda_{l,k})_{k=1}^{m}$, $x = (x_k)_{k=1}^{m}$, $\langle\lambda_l, x\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_{l,k} x_k$. В этом случае заданные функции $\varphi_k(x)$ и $D_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ допускают в $E_{(0)}$ разложения вида

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l} \exp\langle\lambda_l, x\rangle, \quad D_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} d_{k,l} \exp\langle\lambda_l, x\rangle, \tag{2}$$

причем ряды в (2) абсолютно сходятся в пространстве $E_{(0)}$.

Потребуем также, чтобы выполнялись условия:

$$\tau_\Lambda = \inf_{l \in \mathbb{N}} |\lambda_l| > 0 \quad \text{и} \quad P_k(\lambda_l) \neq 0 \quad \forall l \geqslant 1 \; \forall k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Теперь функции $u_k(x,t)$ ищем в виде рядов

$$u_k(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} y_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

коэффициенты которых требуется определить.

Как и в [1], будем говорить, что ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} y_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle$ обладает свойством $[E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)]$, если $\big(y_{k,l}\big)_{k=1}^{n} \in (C(\Gamma))^n$; $\big(y'_{k,l}\big)_{k=1}^{n} \in (C(\Gamma))^n$, а ряды $\sum\limits_{l=1}^{\infty} y_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty} y'_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle$ сходятся абсолютно в $E_{(t)}$ при любом фиксированном $t \in \Gamma$ и в $C(\Gamma)$ при каждом $x \in Q_1$.

Если предположить, что свойство $[E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)]$ для (4) имеет место, и учесть отмеченное в п.1 свойство 3) семейства $\big\{E_{(t)}\big\}_{t \in \Gamma}$, то получается, что каждый из рядов $\sum\limits_{l=1}^{\infty} y_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty} y'_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_l, x \rangle$ можно дифференцировать при фиксированном $t \in \Gamma$ любое число раз по переменным x_1, x_2,.., x_m, причем все полученные ряды сходятся абсолютно в $E_{(t)}$.

Далее,

$$P_k\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{\infty} y'_{k,l}(t) P_k(\lambda_l) \exp\langle \lambda_l, x \rangle,$$

$$P_{j,k}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) u_j(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} y_{j,l}(t) P_{j,k}(\lambda_l) \exp\langle \lambda_l, x \rangle,$$

и от (1) можно перейти к системе

$$\begin{cases} y'_{k,l}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}(t) \frac{P_{j,k}(\lambda_l)}{P_k(\lambda_l)} y_{j,l}(t) + \frac{d_{k,l}}{P_k(\lambda_l)}, \\ y_{k,l}(0) = c_{k,l}, \end{cases} \tag{5}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots$ Следуя [1], назовем (5) (β, Λ)–ограниченной системой, если $\exists \beta \in (-\infty, +\infty)$:

$$A_\beta := \sup\bigl\{|\gamma_{j,k,l}^{(\beta)}| : \ j,k = 1,2,\ldots,n;\ l = 1,2,\ldots\bigr\} < +\infty. \tag{6}$$

Здесь $\gamma_{j,k,l}^{(\beta)} = \dfrac{P_{j,k}(\lambda_l)}{P_k(\lambda_l)|\lambda_l|^\beta}$, $j,k = 1,2,\ldots,n$; $l = 1,2,\ldots$ Далее речь будет идти именно о (β, Λ)–ограниченных системах.

Задача последующих рассуждений — исследовать систему (5) и найти ее решения вида (4) такие, что соответствующие ряды обладают свойством $[E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)]$.

П.3. "Модельная ситуация". Для иллюстрации метода рассмотрим простейший из случаев: $\Gamma = [0, T]$ — отрезок вещественной оси $(T > 0)$. Перепишем (5) в виде

$$\begin{cases} y'_{k,l}(t) = |\lambda_l|^\beta \sum\limits_{j=1}^n a_{j,k}(t)\gamma_{j,k,l}^{(\beta)} y_{j,l}(t) + \dfrac{d_{k,l}}{P_k(\lambda_l)}, \\ \qquad y_{k,l}(0) = c_{k,l}, \end{cases} \tag{7}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots$

Известно, что эта система имеет единственное решение в $C(\Gamma)$. Интегрируя первое равенство в (7) и учитывая начальные условия, имеем при $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$y_{k,l}(t) = |\lambda_l|^\beta \int\limits_0^t \sum_{j=1}^n a_{j,k}(\tau)\gamma_{j,k,l}^{\beta} y_{j,l}(\tau)d\tau + t\frac{d_{k,l}}{P_k(\lambda_l)} + c_{k,l}. \tag{8}$$

Пусть при любом фиксированном l $(l \in \mathbb{N})$ $\psi_l(t) := \sum\limits_{k=1}^n |y_{k,l}(t)|$. Тогда, оценивая в (8) $|y_{k,l}(t)|$ и суммируя эти оценки, получаем:

$$\psi_l(t) \leqslant |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{j,k}(\tau)||y_{j,l}(\tau)|d\tau + D_l|t| + C_l,$$

где $D_l = \sum\limits_{k=1}^n \left|\dfrac{d_{k,l}}{P_k(\lambda_l)}\right|$, $C_l = \sum\limits_{k=1}^n |c_{k,l}|$.

Положим $M(t) := \sup\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{j,k}(\tau)| :\ j=1,2,\dots,n;\, 0\leqslant\tau\leqslant t\right\}$. Учитывая, что тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,k}(\tau)||y_{j,l}(\tau)| = \sum_{j=1}^{n}|y_{j,l}(\tau)|\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}(\tau)| \leqslant \psi_l(\tau)M(\tau),$$

продолжим оценку:

$$\psi_l(t) \leqslant |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)\psi_l(\tau)d\tau + D_l|t| + C_l \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)\Big(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^\tau M(\tau_1)\psi_l(\tau_1)d\tau_1 + D_l|\tau| + C_l\Big)d\tau + D_l|t| +$$

$$+C_l = C_l + D_l|t| + |\lambda_l|^\beta A_\beta C_l \int\limits_0^t M(\tau)d\tau + |\lambda_l|^\beta A_\beta D_l \int\limits_0^t M(\tau)|\tau|d\tau + |\lambda_l|^{2\beta}\times$$

$$\times A_\beta^2 \int\limits_0^t M(\tau)\Big(\int\limits_0^\tau M(\tau_1)\Big[|\lambda_l|^\beta A_\beta \int_0^{\tau_1} M(\tau_2)\psi_l(\tau_2)d\tau_2 + |\tau_1|D_l + C_l\Big]d\tau_1\Big)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_l + C_l|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau + C_l|\lambda_l|^{2\beta}A_\beta^2 \int\limits_0^t M(\tau)\int\limits_0^\tau M(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$

$$+D_l|t| + D_l|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)|\tau|d\tau + D_l|\lambda_l|^{2\beta}A_\beta^2 \int\limits_0^t M(\tau)\int\limits_0^\tau M(\tau_1)|\tau_1|d\tau_1 d\tau +$$

$$+|\lambda_l|^{3\beta}A_\beta^3 \int\limits_0^t M(\tau)\int\limits_0^\tau M(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} M(\tau_2)\psi_l(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 d\tau \leqslant \dots$$

Итерационную оценку $\psi_l(\tau)$ можно продолжать сколь угодно раз. Очевидно, что при этом остаточный член имеем вид

$$R_n(t) = \big(|\lambda|^\beta A_\beta\big)^n \int\limits_0^t M(\tau)\int\limits_0^\tau M(\tau_1)\cdots \int\limits_0^{\tau_{n-2}} M(\tau_{n-1})\psi_l(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}\dots d\tau_1 d\tau.$$

Тогда

$$|R_n(t)| \leqslant \big(|\lambda|^\beta A_\beta\big)^n (M(t))^n \max_{\tau\in[0,t]} |\psi_l(\tau)| \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1}\dots d\tau_1 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \big(|\lambda_l|^\beta A_\beta M(T)\psi_l(T)\big)^n \frac{t^n}{n!} \leqslant \big(|\lambda_l|^\beta A_\beta M(T)\psi_l(T)T\big)^n \frac{1}{n!},$$

откуда следует, что $R_n(t)$ равномерно сходится к нулю на $\Gamma = [0,T]$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь коэффициенты при C_l и D_l. В частности, при C_l имеем:

$$1 + |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau + |\lambda_l|^{2\beta} A_\beta^2 \int\limits_0^t M(\tau) \int\limits_0^\tau M(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$

$$+|\lambda_l|^{3\beta} A_\beta^3 \int\limits_0^t M(\tau) \int\limits_0^\tau M(\tau_1) \int\limits_0^{\tau_1} M(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 d\tau + \dots \leqslant$$

$$\leqslant 1 + |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau + |\lambda_l|^{2\beta} A_\beta^2 \frac{1}{2}\bigg(\int\limits_0^t M(\tau)d\tau\bigg)^2 +$$

$$+|\lambda_l|^{3\beta} A_\beta^3 \frac{1}{3!}\bigg(\int\limits_0^t M(\tau)d\tau\bigg)^3 + \dots = \exp\bigg(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau\bigg).$$

Аналогично получаем, что коэффициент при D_l имеет вид

$$|t| \exp\bigg(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau\bigg)$$

(учтено, что $|\tau_j| = \tau_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ и что $t > \tau > \tau_1 > \dots$).

Итак, при $\forall t \in \Gamma = [0,T]$, $\forall l = 1, 2, \dots$

$$\psi_l(t) = \sum_{k=1}^n |y_{k,l}(t)| \leqslant (C_l + D_l t) \exp\big(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau\big). \tag{9}$$

Вернемся теперь к первому уравнению в (7) и с учетом оценки (9) получим при $\forall t \in \Gamma$:

$$|y'_{k,l}(t)| \leqslant |\lambda_l|^\beta A_\beta M(t)(C_l + D_l t)\exp\left(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau\right) + D_l. \qquad (10)$$

Введем теперь два класса числовых последовательностей (при произвольном фиксированном $t \in \Gamma$):

$$Ab_\Lambda(E_{(t)}) =$$
$$= \left\{c = \left(c_l\right)_{l=1}^\infty : \text{ ряд } \sum_{l=1}^\infty c_l \exp\langle\lambda_k, x\rangle \text{ сходится абсолютно в } E_{(t)}\right\}$$

$$M_\Lambda(E_{(0)}, E_{(t)}) =$$
$$= \left\{d = \left(d_l\right)_{l=1}^\infty : \forall c \in Ab_\Lambda(E_{(0)}) \ \left(c_l d_l\right)_{l=1}^\infty \in Ab_\Lambda(E_{(t)})\right\}.$$

Потребуем, чтобы $\forall t \in \Gamma$

$$\left(\exp\bigl(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^t M(\tau)d\tau\bigr)\right)_{l=1}^\infty \in M_\Lambda(E_{(0)}, E_{(t)}). \qquad (11)$$

Пусть $\bigl(y_{k,l}(t)\bigr)_{k=1}^n$ — решения системы (7), определенные по формуле (8). Рассмотрим ряды

$$(a)\ \sum_{l=1}^\infty y_{k,l}(t)\exp\langle\lambda_l, x\rangle; \qquad (b)\ \sum_{l=1}^\infty y'_{k,l}(t)\exp\langle\lambda_l, x\rangle. \qquad (12)$$

Лемма 1. *Для рядов (12) при сделанных выше предположениях выполнено свойство* $[E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)]$.

Доказательство. 1) Зафиксируем $\forall t \in \Gamma$. По построению ряды в (3) сходятся абсолютно в пространстве $E_{(0)}$, поэтому $\bigl(c_{k,l}\bigr)_{l=1}^\infty \in Ab_\Lambda(E_{(0)})$; $\bigl(d_{k,l}\bigr)_{l=1}^\infty \in Ab_\Lambda(E_{(0)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Далее, так как

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l \exp\langle\lambda_l, x\rangle = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{k,l}\right)\exp\langle\lambda_l, x\rangle,$$

то $\left(\mathrm{C}_l\right)_{l=1}^{\infty} \in Ab_\Lambda(E_{(0)})$.

Кроме того,

$$\sum_{l=1}^{\infty} D_l \exp\langle\lambda_l, x\rangle = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d_{k,l}}{P_k(\lambda_l)}\right|\right)\exp\langle\lambda_l, x\rangle,$$

и, следовательно, $\left(D_l\right)_{l=1}^{\infty} \in Ab_\Lambda(E_{(0)})$. Тогда $\left(\mathrm{C}_l + D_l t\right)_{l=1}^{\infty} \in Ab_\Lambda(E_{(0)})$ (при каждом фиксированном t), и поэтому при фиксированном t имеем:

$\left(y_{k,l}(t)\right)_{l=1}^{\infty} \in Ab_\Lambda(E_{(t)})$ (с учетом (9), (11) и свойств $\left\{E_{(t)}\right\}_{t\in\Gamma}$), т.е. ряд (a) из (12) сходится абсолютно в $E_{(t)}$ при любом фиксированном $t \in \Gamma$;

$\left(y'_{k,l}(t)\right)_{l=1}^{\infty} \in Ab_\Lambda(E_{(t)})$ (с учетом (10), (11) и свойств $\left\{E_{(t)}\right\}_{t\in\Gamma}$), т.е. ряд (b) из (12) сходится абсолютно в $E_{(t)}$ при любом фиксированном $t \in \Gamma$.

2) Зафиксируем теперь $x \in Q$ и положим $\nu_{k,l} := \max\limits_{t\in\Gamma} |y_{k,l}(t)|$. Учитывая, что $t \leqslant T$ и принимая во внимание оценку (9), имеем:

$$\nu_{k,l} \leqslant (C_l + D_l t)\exp\left(|\lambda_l|^\beta A_\beta \int_0^T M(\tau)d\tau\right).$$

Но тогда, в силу проведенных выше рассуждений, свойства (11) и топологических свойств пространства $C(\Gamma)$ получаем, что ряд (a) из (12) сходится абсолютно в $C(\Gamma)$ при любом фиксированном $x \in Q$, а сумма его при этом равна $u_k(x,t)$.

С помощью аналогичных рассуждений и оценки (10) показывается, что и ряд (b) из (12) сходится абсолютно в $C(\Gamma)$ при любом фиксированном $x \in Q_1$, а его сумма равна $\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t}$.

Лемма доказана.

Инвариантность $E_{(t)}$ относительно дифференцирования по x позволяет утверждать, что $u(x,t) = \left\{u_k(x,t)\right\}_{k=1}^{n}$ — искомое решение задачи Коши (7) (или (1)–(2)) из $\left\{E_{(t)}, t\in\Gamma; C(\Gamma)\right\}^n$.

П.4. Общая ситуация. Рассмотрим теперь кривую Γ со свойствами, отмеченными в п.1, и соответствующее пространство $C(\Gamma)$. Из (7) при этом снова получаем (8), где интегралы берутся по той части $\Gamma(0,t)$ кривой Γ, которая соединяет точки 0 и t.

Прежде всего остановимся на ситуации, когда начало координат совпадает с одним из концов Γ. Пусть $t=\mu(s)$ — уравнение кривой Γ, где s — длина $\Gamma(0,t)$. Положим

$$\Phi_l(s)=\sum_{k=1}^{n}|y_{k,l}(\mu(s))|,$$

$$M(s)=\sup\big\{\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}(\mu(\sigma))|:\ j=1,2,\dots,n;\ 0\le\sigma\le s\big\}.$$

Действуя, как в п.3, из (8) получаем аналоги оценок (9) и (10):

$$\psi_l(t)=\Phi_l(s)\leqslant(C_l+D_lt)\exp\left(|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}\int\limits_0^s M(\sigma)d\sigma\right)$$

$$|y'_{k,l}(t)|\leqslant|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}M(s)(C_l+D_lt)\exp\left(|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}\int\limits_0^s M(\sigma)d\sigma\right)+D_l,$$

$k=1,2,\dots,n$, $l=1,2,\dots$

Возможно также, что начало координат не совпадает с концами Γ. При этом t лежит между началом координат и одним из концов Γ. Пусть s — длина дуги $\Gamma(0,t)$, $t=\mu_i(s)$ — уравнения двух фрагментов Γ (дуг AO и OB, где A и B — концы кривой, O — начало координат), $i=1,2$. Полагая

$$\Phi_{l,i}(s)=\sum_{k=1}^{n}|y_{k,l}(\mu_i(s))|,$$

$$M_i(s)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}(\mu_i(\sigma))|:\ j=1,2,\dots,n;\ 0\le\sigma\le s\right\},$$

снова можно вывести аналоги оценок (9) и (10). Таким образом, как и в работе [1], получаем, что всегда можно считать справедливыми оценки

$$\forall t\in\Gamma\quad\sum_{k=1}^{n}|y_{k,l}(t)|\leqslant(C_l+D_lt)\exp\left(|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}\int_0^s M_0(\sigma)\Phi_{l,0}(\sigma)d\sigma\right),$$

$$|y'_{k,l}(t)|\leqslant|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}M_0(s)(C_l+D_lt)\exp\left(|\lambda_l|^{\beta}A_{\beta}\int_0^s M_0(\sigma)d\sigma\right)+D_l,$$

где $t = \mu_i(s)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots$, $M_0(\sigma)$ и $\Phi_{l,0}(\sigma)$ совпадают с $M(\sigma)$ и $\Phi_l(\sigma)$, если начало координат является одним из концов Γ, и с $M_i(\sigma)$ и $\Phi_{l,i}(\sigma)$, если начало координат не совпадает с концами Γ (индекс $i = 1, 2$ определяется в зависимости от положения точки t относительно начала координат).

Классы $Ab_\Lambda(E_{(t)})$,$M_\Lambda(E_{(0)}, E_{(t)})$ определяются точно так же, как в п.3, а условие (11) принимает вид

$$\forall t \in \Gamma \quad \left\{ \exp |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^{\mu_{i(t)}^{-1}(t)} M_0(\sigma) d\sigma \right\}_{l=1}^\infty \in M_\Lambda(E_{(0)}, E_{(t)}). \tag{13}$$

Пусть $\left(y_{k,l}(t)\right)_{t=1}^n$ — решения системы (7), определенные формулой (8). Повторяя рассуждения п.3, показываем, что для ряда $\sum\limits_{l=1}^\infty y_{k,l}(t) \exp\langle \lambda_k, x\rangle$ имеет место свойство $[E_{(t)}, t \in \Gamma;\ C(\Gamma)]$. При этом отличия возможны лишь на втором этапе доказательства, и то, в основном, в обозначениях. Именно, зафиксируем $x \in Q$. При $\forall k \leqslant n$ и $l = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\nu_{k,l} \leqslant (C_l + D_l T) \exp |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^{\mu_1^{-1}(A)} M_1(\sigma) d\sigma +$$
$$+ (C_l + D_l T) \exp |\lambda_l|^\beta A_\beta \int\limits_0^{\mu_2^{-1}(B)} M_2(\sigma) d\sigma.$$

Заметим, что если начало координат является одним из концов Γ, то в правой части последнего неравенства стоит лишь один ряд. Дальнейшие рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 1, повторяются.

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть Γ — область изменения переменной t — непрерывная ограниченная простая незамкнутая спрямляемая кривая, содержащая начало координат и оба своих конца и обладающая свойством (S), $C(\Gamma)$ — t–базовое пространство, переменная x меняется на Q — выпуклом множестве в $\mathbb{R}^m$ или C^m ($m \geqslant 1$), $\{E_{(t)}\}_{t\in\Gamma}$ — семейство ПОЛВП определенных на Q функций, обладающее свойствами 1)–3) (см. п.1).*

Пусть, далее, система (5) (β,Λ)*–ограничена при некотором конечном* β*, а описанная в п.2 система* $\mathcal{E}_\Lambda$ *удовлетворяет условиям (3) и (13).*

Для коэффициентов $a_{j,k}(t)\in C(\Gamma)$*, функций* $D_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ *из* $E_{(0)}$ *и любых начальных функций* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ *из* $E_{(0)}$ *задача Коши (1)–(2) имеет решение, представимое в виде рядов (4), коэффициенты которых определяются единственным образом по формуле (8).*

Пусть $u_k(x,t)$ *— суммы этих рядов,* $u=\big(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)\big)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\big(\frac{\partial u_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial u_1}{\partial t}\big)$.

Тогда $u_k(x,t)$ *— решение задачи Коши (1)–(2) из класса* $\big\{E_{(t)},t\in\Gamma;\ \mathrm{C}^1(\Gamma)\big\}^n$ *такое, что все ряды (4) обладают свойством* $[E_{(t)},t\in\Gamma;\ C(\Gamma)]$.

Литература

1. Коробейник Ю.Ф. О задаче Коши для линейных систем с переменными коэффициентами. — Деп. в ВИНИТИ 25.07.1997. N 2501-В97. — 64 с.

2. Коробейник Ю.Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т.34. N 4. С.881–922.