11 ВЕЛИКИХ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. И. Юдович

“Принц лично водил войска
в атаку одиннадцать раз. ”

А. Дюма.

“Пулемет задыхался, хрипел, бил,
И с флангов летел трезвон.
Одиннадцать раз в атаку ходил
Отчаянный батальон. ”

Н. Тихонов.

Хотя эта статья была написана по другому поводу, я почтительно посвящаю ее Владимиру Игоревичу Арнольду. Когда интервьюер однажды спросил, есть ли у меня в математике герои, я подчеркнул сначала, что именно герои, а не боги, и первым назвал В.И.Арнольда. Вряд ли кто-нибудь из современных математиков избежал его влияния (см. и эту статью). Его уникальная способность откликаться неожиданными стимулирующими идеями на всё живое и новое в математике и физике, безупречный математический вкус, необычайная проникающая сила , заставляющая вспомнить классиков, замечательное умение видеть те точки, к которым нужно прилагать усилия, чтобы получить наибольшие результаты, сделали его одним из первых мировых лидеров в современной математике.

Это — слегка расширенный текст доклада, прочитанного на конференции по математической гидродинамике в университете г. Халл, Англия, 10 апреля 2001 г. Доклад был также повторен в Институте Ньютона, Кембридж, 23 апреля 2001 г. Название доклада предложил В. А. Владимиров, пригласив меня выступить на конференции в Халле. "Почему 11?" — спросил я его. "Да так, — ответил он. — У Гильберта было 20 проблем, у Смейла — 19, но это же по всей математике. Ну, если Вам не нравится, можно заменить название. " Но мне число 11 понравилось. Оно встречается не так часто, как, скажем, 12 или 7, и вспомнилось, что разные и притом любимые мною авторы упоминают его, говоря о сражениях и атаках (на докладе мне еще напомнили, что в футбольной команде 11 игроков. А недавно я прочитал в статье А. Казанцева, в журнале "Шахматное обозрение", 2, 2001, что "11 — по исследованиям создателя альфаметрики В. И. Авинского — модуль Вселенной, причастный ко всем размерам и микро-, и макромиров"). Так что это боевое число, пусть оно остается в заголовке, хотя не следует его принимать слишком всерьез. На самом деле, проблем больше, да и почти каждая из них разветвляется и, по тем или иным ассоциациям, вызывает к жизни новые проблемы. При выборе проблем для списка я старался руководствоваться следующими принципами.

1. Решение проблемы выводит нас на новый уровень понимания динамики жидкости или, во всяком случае, достаточно широкого класса гидродинамических явлений.

2. Проблему, по всей видимости, невозможно решить известными методами. Нужны новые идеи и подходы, которые, вероятно, дадут начало новым математическим теориям, помогут усовершенствовать наше искусство описания явлений природы.

3. (С. Смейл [1]) "Вера, что вопросы, их решение, частичные результаты или даже попытки их решить будут, вероятно, иметь огромное значение для математики и ее развития в следующем столетии".

4. Я сам провел достаточно много времени в попытках решить проблему и кое-что о ней знаю — по крайней мере, знаю несколько путей, которые не ведут к желаемым результатам.

В итоге в список попали почти исключительно проблемы, относящиеся к несжимаемой однородной идеальной и вязкой жидкости. Впрочем, некоторые проблемы не вошли в список из-за ограниченного объема данной статьи. Это различные проблемы, относящиеся к сжимаемой жидкости, неоднородной жидкости, различные асимптотические модели конвекции, задачи магнитной гидродинамики, задачи о многокомпонентных, особенно бесконечнокомпонентных, средах, общие проблемы аналитической динамики и дифференциальной геометрии, сплошных сред, различные задачи с неизвестными, в частности свободными границами и т. д. Некоторые из них удовлетворяют, по-моему, всем четырем принципам, и я надеюсь к ним вернуться в последующих публикациях.

Конечно, хотелось, чтобы проблема была сформулирована математически строго. Это, однако, во многих случаях не удается. Я думаю, что физическая проблема не может быть полностью сформулирована, пока она не решена. Лишь красивый ответ окончательно подтверждает правильность исходной постановки задачи.

Многие задачи, обсуждаемые дальше, хорошо известны, некоторые — новы. В текущей математической литературе можно найти решение, пожалуй, всех известных проблем, особенно тех, в которых предполагаемый с очень большой вероятностью результат нужно лишь строго обосновать. Как говорит Франсуа Рабле, “каждый добропорядочный гражданин должен верить всему, что ему говорят, и что напечатано”. В математической гидродинамике этот великий принцип следует применять с осмотрительностью — публикуется много ошибочных доказательств.

Далее следует список проблем с некоторыми комментариями. Первые две проблемы относятся к основам математической физики и не входят в число одиннадцати.

G. Математические модели гидродинамики

Проблема G1. *Построить математические модели сплошных сред,* *включающие фазовые переходы (кипящая вода, сегнетоэлектрики, которые могут превращаться в диэлектрики, жидкие кристаллы).*

Это в основном проблема корректной математической постановки начально-краевых задач в таких ситуациях, когда сплошная среда может в неизвестное заранее время и в неизвестных заранее областях занятого ею пространства претерпевать фазовые превращения. Например, нужно научиться описывать движение воды в условиях, когда в ходе изучаемого процесса температура воды изменяется в интервале, содержащем одну или несколько точек фазового перехода (замерзание — плавление, кипение — конденсация, тройная особая точка уравнения состояния, около которой могут сосуществовать все три фазы). Эта проблема принадлежит физике не в меньшей мере, чем математике — трактовка фазовых переходов — все еще неустоявшаяся область физики. Текущие физические журналы регулярно публикуют работы по этой теории (см., например,[2]).

Имеющиеся феноменологические модели газожидкостных смесей, кипящей воды — грубоваты, а интересно было бы получить надлежащие уравнения, исходя из “первых принципов” статистической термодинамики. К слову сказать, возможность превращения воды в лед лишний раз напоминает нам о невозможности установить раз и навсегда границы между науками о природе, раз таких границ нет в самой природе.

Образующиеся при фазовых переходах поверхности раздела фаз то и дело оказываются неустойчивыми, и на них возникают волны. С этим связано немало интересных проблем, многие из которых даже не требуют создания новых методов и вполне доступны для исследования. Вспоминается эксперимент, проведенный ростовскими физиками (Фридкин, Греков) [3] еще в 70-е годы. Концы стержня, изготовленного из сегнетоэлектрического материала (типа титаната бария), поддерживались при различных постоянных температурах. При этом температура одного конца была ниже, а другого — выше точки Кюри. Можно было ожидать, что часть стержня, близкая к горячему концу, будет находиться в диэлектрической фазе, а холодная часть — в сегнетоэлектрической. В общем, так оно и выходит в эксперименте, но точка раздела фаз начинает совершать колебания вдоль стержня. Надлежащая теория этого явления, насколько я знаю, так и не была построена.

Другой пример: нет сомнений, что плоская граница между водой и льдом в процессе замерзания или таяния зачастую оказывается неустойчивой. Было бы интересно исследовать возникающие на ней самопроизвольно волны. Интересно также рассмотреть и параметрически возбуждаемые вол ны, порождаемые колебаниями внешней температуры и давления. Результаты могут оказаться интересными, например, при исследовании движения ледников, формирования и таяния айсбергов, а также замерзания водоемов. Полученные данные, возможно, найдут применение при разработке практических способов разрушения ледового покрова рек и озер.

Проблема G2. *Определить зависимости кинетических коэффициентов (вязкости, теплопроводности, диффузии, поверхностного натяжения, диэлектрической проницаемости,...) от термодинамических параметров (температуры T, давления p, плотности ρ, концентрации примеси c,...).*

Очень интересно выяснить, какие ограничения на кинетические коэффициенты накладывает требование глобальной разрешимости основных эволюционных начально-краевых задач. Я верю в возможность общей теории глобально разрешимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Конечно, глобальное существование решения начально-краевой задачи есть специальное *физическое* свойство системы — бывают ведь и взрывающиеся сплошные среды, которые могут существовать лишь в течение ограниченного времени. Говоря математически, возможность коллапса есть свойство общего положения, тогда как глобальная разрешимость — своего рода вырождение (Такова странноватая математическая терминология — наиболее интересные и красивые системы именуются вырожденными).

I. Единственность. Глобальное существование и несуществование

решений.

Проблема 1. *Глобальная разрешимость и регулярность решений основных начально-краевых задач для трехмерных уравнений Эйлера и Навье-Стокса в случае однородной несжимаемой жидкости.*

Об этих знаменитых проблемах нет смысла здесь долго распространяться, тем более, что недавно я написал о них пространную статью [4]. Замечу лишь, что аналогичные проблемы возникают во многих областях нелинейной математической физики. Для уравнений Эйлера и Навье-Стокса в двумерном случае ситуация достаточно хороша — известны глобальные теоремы существования обобщенных и гладких решений, а также и достаточно сильные теоремы единственности. Поэтому довольно широко распространен предрассудок, что трудны лишь трехмерные задачи, а для двумерных задач нет особых трудностей. На самом деле, “2-D or not 2-D that is not the question”. Дело не столько в двумерности, сколько в специфических свойствах уравнений Эйлера и Навье-Стокса, которые позволяют получить сильные априорные оценки решения. В случае уравнений Эйлера — это существование интегралов вихря. В случае уравнения Навье-Стокса решающую роль играют специальные теоремы вложения функциональных пространств; кинетическая энергия в трехмерном случае по-прежнему квадратична, а для того чтобы проследовать по тому же пути, что и для плоских течений, понадобилась бы норма скорости в пространстве L_3 (а в n-мерном случае — L_n).

Если рассматривать обобщенные решения уравнений Эйлера с начальными полями скорости, обладающими лишь конечной кинетической энергией, без дополнительных предположений гладкости, преимущество двумерности тут же теряется. Проблема глобальной разрешимости и единственности решения основной начально-краевой задачи в двумерной области оказывается едва ли не той же трудности, что и аналогичная трехмерная задача.

Рассмотрим еще уравнения идеальной конвекции

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \theta k, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{3}$$

$$v_n\Big|_{\partial D} = 0, \quad v\Big|_{t=0} = v_0, \quad \theta\Big|_{t=0} = \theta_0. \tag{4}$$

Здесь v — поле скорости, p — давление, θ — температура, k — орт, направленный вертикально вверх, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$; $v_0 = v_0(x)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$, $x \in D$ — начальные поля скорости и температуры.

Если $\theta_0 = const$, то $\theta(x,t)$ — постоянная для всех x, t, и мы приходим к задаче для уравнений Эйлера. Даже в двумерном случае для неизотермических течений доказательство глобальной теоремы существования в классе гладких решений совершенно недоступно. Снова встает вопрос о возможности коллапса. Двумерность мало помогает, так как здесь уже нет закона сохранения вихря в жидкой частице.

По-настоящему все эти проблемы следовало бы ставить неформально: найти правильное определение (обобщенного) решения так, чтобы были справедливы как глобальная теорема существования, так и теорема единственности.

Проблема 2. *Глобальные теоремы существования стационарных и периодических течений.*

После классических работ Ж. Лере [7] и его последователей (см., например, [5]) остались все-таки две проблемы, не поддающиеся усилиям исследователей.

Проблема 2a. *Доказать глобальную теорему существования решения в двумерной задаче обтекания твердого тела вязкой жидкостью.*

Скорость на бесконечности предполагается заданной и равной постоянному вектору $\vec{\mathcal{U}}$.

История этой задачи начинается с парадокса Стокса, который устано-

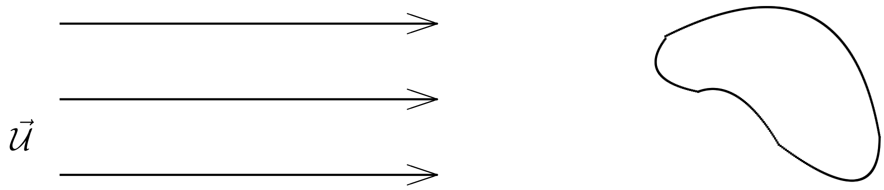

Рис. 1:

вил, что в линейной постановке, с отброшенным членом $(v, \nabla)v$, задача не имеет решения. Этот результат находится в разительном контрасте с существованием практически очень важного трехмерного течения около ограниченного тела. Решение Стокса, относящееся к обтеканию сферы, имеет многочисленные применения в естествознании.

Можно обратить задачу и рассматривать поступательные движения бесконечного твердого цилиндра с постоянной скоростью $-\vec{\mathcal{U}}$ в жидкости, покоящейся на бесконечности. Результат Стокса означает, что с течением времени (при $t \to +\infty$) вся жидкость начнет двигаться с той же скоростью $-\vec{\mathcal{U}}$ и условие на бесконечности, будет нарушено. Вопрос состоит в том, изменится ли этот вывод, если рассматривать полные уравнения Навье-Стокса. Надо заметить, что по сути, все основные результаты для Навье-Стокса получены, так сказать, *вопреки* нелинейности. Результат, который более или менее легко получается для линеаризованных уравнений, затем (в борьбе с нелинейностью!) переносится на полные уравнения. В проблеме двумерного обтекания искомый результат должен быть получен *благодаря* нелинейности. Пока что это удалось сделать лишь для малых чисел Рейнольдса [6].

Аналогичные вопросы для непоступательных движений тела, а также в случае периодических по времени движений также не нашли еще удовлетворительного решения.

Проблема 2b. *Стационарные и периодические течения вязкой несжимаемой жидкости при наличии внутренних источников и стоков.*

Рассмотрим стационарную краевую задачу для системы Навье-Стокса в ограниченной области D в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ с границей ∂D, состоящей из связных компонент S_1, $S_2, \ldots, S_k$. Будем считать скорость v заданной на границе:

$$v\big|_{\partial D} = q, \tag{5}$$

где q — заданное на границе векторное поле. Условие несжимаемости жидкости накладывает на поле q известные ограничения

$$\sum_{\ell=1}^{k} \int\limits_{S_\ell} q_n dS = 0. \tag{6}$$

Суммарный поток скорости сквозь границу ∂D должен быть равен нулю. Между тем, в классической работе Ж. Лере [7] глобальная теорема существования стационарного течения доказана лишь при более ограничительном условии:

$$\int\limits_{S_1} q_n dS = \ldots = \int\limits_{S_k} q_n dS = 0, \tag{7}$$

которое совпадает с необходимым условием (6) лишь в случае связной границы, при $k = 1$. Условие (7) означает, что жидкость не поступает в область течения D дополнительно изнутри областей, ограниченных поверхностями S_1, $\ldots, S_{k-1}$ (считаем, что S_k — внешняя граница), а также и не удаляется из области D через эти поверхности. Нет ни внутренних источников, ни внутренних стоков (вернее, их суммарная обильность равна нулю).

То же условие (7) пришлось наложить на граничное поле $q(x, t)$ и при доказательстве глобальной теоремы существования периодических движений [8]. Мы приходим к следующей проблеме.

Доказать (или опровергнуть путем построения контрпримеров) глобальную теорему существования стационарных и вынужденных периодических движений вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда ограниченная область D в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$ имеет границу, состоящую из компонент *связности $S_1, \dots, S_k$, причем $k > 1$, и выполняется лишь необходимое условие (6).*

При этом данные задачи ∂D, q, а также внешнюю массовую силу $F(x)$ в стационарном случае и $F(x,t)$ — в периодическом, можно считать C^∞–гладкими.

У меня складывается впечатление, что результат будет скорее отрицательным. Если так, то необходимые контрпримеры могут быть построены уже для простейшего случая концентрического кругового кольца.

Представляют интерес и внешние задачи с внутренними источниками и стоками. Некоторые интересные явления, наблюдаемые для внешних вращательно симметричных течений, рассмотрены в [9].

Добавлю еще, что условие (7) позволяет доказать диссипативность нестационарной системы Навье-Стокса [10]. Вероятно, и этот результат (исключая, конечно, случай медленных течений) тоже падает, когда выполняется лишь общее условие (6).

Мне кажется вероятным, что при увеличении числа Рейнольдса стационарный режим может исчезнуть — уйти на бесконечность, когда $R \to R_*$, причем критическое значение R_* конечно. Однако, перед тем как исчезнуть, этот стационарный режим теряет устойчивость, порождая автоколебательный периодический режим (возможно, конечно, что сначала происходит ветвление в классе стационарных режимов). Интересно было бы проверить хотя бы в численном эксперименте возможность такого хода событий.

II. Общая теория устойчивости течений вязкой жидкости

Проблема 3. *Существование неустойчивых стационарных и периодических течений в произвольной области.*

Пусть $a = a(x)$ — поле скорости стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в заданной ограниченной области D в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$. Будем считать a решением краевой задачи для системы Навье-Стокса при заданных внешних силах и граничном поле скорости. Линеаризуя уравнение Навье-Стокса на этом *основном течении* и разыскивая решение вида $e^{\sigma t}u(x)$, приходим к спектральной задаче

$$\sigma u + (u, \nabla)a + (a, \nabla)u = -\nabla q + \nu \Delta u, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{9}$$

$$u\big|_{\partial D} = 0. \tag{10}$$

Множество комплексных чисел σ, для которых задача (8)–(10) ненулевое решение, назовем *спектром устойчивости* основного течения a и обозначим его через Σ_a. Известно, что спектр устойчивости любого течения a счетен, и отвечающая ему система собственных и присоединенных векторов полна [14].

Попробуем представить себе великую будущую гидродинамическую теорию устойчивости, которая уже разрешила все принципиальные задачи и может поручить компьютеру исследование конкретных течений, их устойчивости и переходов. Возможно, в этой теории будут играть существенную роль следующие понятия.

Определение 1 *Назовем дестабилизатором $\mathcal{D} = \mathcal{D}(D)$ множество всех гладких соленоидальных ($\operatorname{div} a = 0$) векторных полей a на области D таких, что спектральная задача (8)–(10) имеет хотя бы одно собственное значение σ_0 на мнимой оси:*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(D) = \{a:\ \operatorname{div} a = 0,\ \exists \sigma_0 \in \Sigma_a:\ \operatorname{Re} \sigma_0 = 0\}. \tag{11}$$

Определение 2 *Бифуркатором $\mathcal{B} = \mathcal{B}(D)$ назовем множество соленоидальных векторных полей a на D, чей спектр устойчивости Σ_a содержит точку 0:*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(D) = \{a:\ \operatorname{div} a = 0,\ 0 \in \Sigma_a\}. \tag{12}$$

Определение 3 *Осциллятором $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D)$ называется множество всех гладких соленоидальных полей a на D, чей спектр устойчивости Σ_a содержит хотя бы одну пару комплексно сопряженных чисел $\pm i\omega$, $\omega \neq 0$:*

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(D) = \{a:\ \operatorname{div} a = 0,\ \exists \omega \in R,\ \omega \neq 0 : i\omega \in \Sigma_a\}. \tag{13}$$

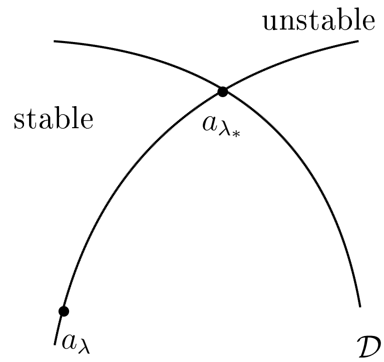

Рис. 2:

Пусть теперь $a_\lambda \in a_\lambda(x)$ — соленоидальное векторное поле, зависящее от вещественного параметра λ. Предположим, что при $\lambda = 0$ это течение, $a_0 = a_0(x)$ асимптотически устойчиво, и его спектр устойчивости расположен внутри левой полуплоскости. Тогда свойство асимптотической устойчивости сохраняется и для малых λ. Будем теперь увеличивать λ (пусть, для определенности, $\lambda > 0$). Возможно, что течение a_λ при некоторых λ неустойчиво. Критические значения λ_*, отвечающие переходу собственных значений из устойчивой полуплоскости в неустойчивую, в частности, те, которые разделяют интервалы устойчивости и неустойчивости, определяются тем условием, что спектр Σ_a содержит хотя бы одну точку мнимой оси. Иначе говоря, критические значения λ_* определяются условием: $a_{\lambda_*} \in \mathcal{D}(D)$ (см. Рис. 2). Конечно, при движении по параметру λ семейство a_λ может несколько раз пересекать дестабилизатор $\mathcal{D}$.

Если уже известно, что течение a_λ теряет устойчивость, возникает вопрос о характере соответствующего перехода. В условиях общего положения ответ в основном зависит от того, каков нейтральный спектр (пересечение спектра с мнимой осью) критического течения a_{λ_*}. Если $a_{\lambda_*} \in \mathcal{B}(D)$, можно ожидать, что происходит ветвление стационарных режимов. Если же $a_{\lambda_*} \in \mathcal{O}(D)$, то в условиях общего положения имеет место бифуркация ответвления цикла (автоколебательного периодического режима).

Если представить себе, что множества $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$ имеются в памяти машины, то в каждом конкретном случае остается лишь проследить за попаданием на них семейства a_λ.

Сформулируем проблему в следующем виде.

Доказать, что для любой области D *в* $\mathbb{R}^3$ *или* $\mathbb{R}^2$ *множества* $\mathcal{D}(D)$, $\mathcal{B}(D)$, $\mathcal{O}(D)$ *непусты.*

Пока что этот результат известен лишь для областей вращения в $\mathbb{R}^3$ [11]–[13]. Конечно, вслед за доказательством главного свойства всякого множества — его непустоты — возникнут и вопросы о структуре множеств $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$. Вероятно, они окажутся стратифицированными в соответствии с коразмерностями бифуркаций, возникающих при их пересечении семейством a_λ.

Вполне аналогичные вопросы естественно поставить и для периодических режимов, скажем, фиксированного периода p. Кроме множеств $\mathcal{D}_p$, $\mathcal{B}_p$, $\mathcal{O}_p$, естественно обобщающих $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$, нужно будет включить еще *дубликатор* $\mathcal{D}b_p$ — множество p-периодических по t соленоидальных векторных полей на области D, обладающих тем свойством, что отвечающий им оператор монодромии имеет мультипликатор -1.

В заключение заметим, что в конечномерном случае введенные определения неплохо работают. Например, удается построить множества, аналогичные $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$, для галеркинских аппроксимаций уравнений Навье-Стокса (Юдович В. И. О бифуркаторах, осцилляторах и дестабилизаторах системы Навье-Стокса, статья готовится к печати).

Проблема 4. *Полнота системы решений Флоке в задаче устойчивости периодических течений вязкой жидкости.*

Линеаризация уравнений Навье-Стокса на известном T-периодическом течении $a(x,t)$ в ограниченной области D с твердой границей приводит к системе уравнений с T-периодическими коэффициентами. Если разыскивать ее решения вида $e^{\sigma t}u(x,t)$, где вектор-функция u T-периодична, то получим спектральную задачу с комплексным параметром σ

$$u_t + \sigma u + (a,\nabla)u + (u,\nabla)a = -\nabla q + \nu\Delta u, \tag{14}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{15}$$

$$u\big|_{\partial D} = 0. \tag{16}$$

Множество комплексных чисел σ, для которых эта задача имеет ненулевое решение, называется *спектром устойчивости или спектром Флоке течения* $a(x,t)$. Заметим, что вместе с каждой точкой σ этот спектр содержит также счетное число точек $\sigma+in\omega$, $\omega = 2\pi/T$, $n \in Z$. Наряду с решением $e^{\sigma t}u(x,t)$, к решениям Флоке относят также решение вида $e^{\sigma t}\sum\limits_{k=0}^{n} t^k u_m^k(x,t)$, $m = 0,1,\dots r$ с T-периодическими вектор-функциями u_m^k, называемыми присоединенными решениями Флоке, или (крайне неудачно) обобщенными решениями Флоке.

Определим гильбертово пространство $S_2(D)$ как замыкание множества C^∞-гладких, финитных в области D соленоидальных векторных полей по норме $L_2(D)$. Сформулируем следующую проблему

Доказать, что для любого T-периодического решения a система решений Флоке полна — в том смысле, что их значения при $t = 0$ образуют полную систему в $S_2(D)$.

Введем оператор монодромии $\mathcal{U}_T$ линеаризованной системы, которая получается из (14)–(16) при $\sigma = 0$. По определению, для любого решения $u(x,t)$ этой системы $\mathcal{U}_T u_0 = u(\cdot,T)$, если u_0 — начальное значение: $u_0(x) = u(x,0)$. Эквивалентная формулировка проблемы: *доказать, что оператор монодромии $\mathcal{U}_T$ имеет полную систему собственных и присоединенных векторов.*

В случае стационарных течений полнота системы нормальных мод давно доказана [14]. Решающую роль в этом доказательстве играет применение известной теоремы Келдыша. Дело в том, что при $a = 0$ получается самосопряженная спектральная задача, для которой полнота системы собственных векторов выводится стандартно. Слагаемые содержащие течение a, образуют, хотя и не малое, но слабое возмущение главного самосопряженного и положительно определенного оператора, что и дает возможность применить теорему Келдыша.

Довольно удивительным образом оказывается, что в периодическом случае теория Келдыша неприменима. Некоторые результаты о полноте решений Флоке были получены в 70-х годах моим аспирантом А. И. Милославским [15]. Ему пришлось применить теорему Данфорда и Шварца [16], которая тоже дает сохранение полноты системы корневых векторов при возмущении, но основана на совсем иных принципах нежели теорема Келдыша. Условия этой теоремы запрещают собственным значениям невозмущенного оператора неограниченно сближаться. Такое поведение характерно, однако, для спектральных краевых задач на отрезке, а, например, для оператора Лапласа в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$ собственные числа λ растут как $n^{2/m}$ и при $m \geqslant 3$ сближаются, когда $n \to \infty$. Именно из-за этого ограничения нужный результат следует из общих теорем Милославского лишь в тех случаях, когда имеет место полное разделение переменных, и в итоге мы приходим к параболическому уравнению (или системе таких уравнений) второго порядка с периодическими по t коэффициентами и с одной пространственной переменной. Конечно, этот класс включает много интересных течений — параллельные течения в круглой трубе или канале, периодические по t вращательные течения между соосными цилиндрами и т. д. Общая задача оказалась, однако, трудной, причем трудности носят принципиальный характер.

Если принять во внимание лишь те существенные свойства линеаризованной системы Навье-Стокса, с которыми мы, действительно, можем работать, приходим к следующей абстрактной постановке задачи.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$\frac{du}{dt} + Au = B(t)u. \tag{17}$$

Здесь A — (постоянный) самосопряженный оператор (типа оператора Лапласа $-\Delta$ или оператора Стокса $-\Pi\Delta$), причем его обратный $A^{-1} = G$ (оператор

Грина) вполне непрерывен. Оператор-функция $B(t)$ периодична по t с периодом T, для каждого t подчинена оператору A в том сильном смысле, что оператор-функции $G^{1/2}B(t)$ и $BG^{1/2}$ суть ограниченные и непрерывные по t в смысле равномерной операторной топологии (по норме операторов в H) оператор-функции. Точнее говоря, оператор $B(t)$ может быть неограничен и не всюду определен, но его область определения $\mathcal{D}(B(t))$ должна содержать образ оператора $G^{1/2}$, и упомянутые выше оператор-функции должны допускать продолжение по непрерывности до ограниченных и непрерывных.

В случае постоянного B полнота выводится из теоремы Келдыша. Казалось бы, этот результат должен обобщаться и на периодические $B(t)$. Однако Милославский построил пример уравнения вида (17), даже с ограниченным коэффициентом $B(t)$, для которого оператор монодромии квазинильпонентен! Такое уравнение вообще не имеет решений Флоке.

Замечу, что роль полноты нормальных мод или решений Флоке в проблеме устойчивости многими авторами сильно преувеличена. Отсутствие решений Флоке у уравнения (17) говорит о его сверхустойчивости: каждое его решение затухает при $t \to +\infty$ быстрее любой экспоненты, по крайней мере, как $e^{-kt\ln t}$ при некотором $k > 0$, а то даже и как $e^{-kt^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

Пример Милославского носит абстрактный характер. Очень интересно выяснить, возможна ли такого рода сверхустойчивость для параболических уравнений в частных производных и линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса. Мне кажется, что скорее невозможно (более вероятно, что сверхустойчивость имеет место на некотором инвариантном подпространстве). Дело в том, что дифференциальные операторы с переменными коэффициентами, скажем, порядков m и n “почти коммутируют”, их коммутатор “теряет порядок”. Это дифференциальный оператор порядка меньшего, чем $m + n$. С другой стороны, для коммутирующих в естественном смысле операторов A и $B(t)$ результат о полноте, конечно, справедлив.

Сошлюсь еще на работу [18], где построен пример параболического уравнения на торе T^3, вида $u_t - \Delta u = q(x,t)u$ с ограниченным по x, t коэффициентом, у которого имеются решения, затухающие при $t \to +\infty$ как e^{-ct^2}, $c > 0$. Но возможно ли такое быстрое затухание, когда функция q периодична по t?

Существует класс уравнений (17) с самосопряженным и строго положительным оператором монодромии. Это уравнения, для которых выполнено условие ([12, 13])

$$B^*(-t) = B(t). \tag{18}$$

В этом случае, конечно, оператор монодромии уравнения (17) имеет ортонормальный собственный базис. К сожалению, лишь немногие вращательные периодические течения жидкости, а также периодические конвективные течения стратифицированной жидкости приводят к уравнениям вида (17) с выполненным условием (18).

III. Устойчивость течений идеальной жидкости

Проблема 5. *Обосновать законность линеаризации в задаче о неустойчивости стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости относительно слабых норм.*

Под неустойчивостью понимается отсутствие устойчивости по Ляпунову. В само определение устойчивости по Ляпунову входит норма на функциональном пространстве соленоидальных векторных полей, касательных к границе области течения. От выбора этой нормы зависит ответ на вопрос об устойчивости [14, 19, 20, 21, 22]. Есть серьезные основания думать, что все течения идеальной несжимаемой жидкости неустойчивы относительно “сильных” норм: $\max\limits_x |\operatorname{rot} v(x,t)| + \ldots$ в трехмерном случае и $\max\limits_x |\operatorname{grad}\operatorname{rot} v(x,t)| + \ldots$ — в двумерном случае. Многоточием обозначены более слабые нормы, например L_2-норма. Хотя в общем случае это утверждение остается гипотезой, в его справедливости убеждает большой набор примеров и теорем, относящихся к различным классам течений. По-видимому, даже твердое вращение жидкости не является исключением.

Все говорит о том, что уже L_p-нормы вихря в трехмерном случае и его C^λ-нормы в двумерном случае тоже со временем неограниченно возрастают для очень широких классов течений. Эти классы, вероятно, столь широки, что ни одно стационарное течение не может быть относительно таких норм устойчиво по Ляпунову.

В двумерном случае естественный выбор нормы подсказывается известной глобальной теоремой существования: это норма в пространстве V соленоидальных векторных полей на области $D \subset \mathbb{R}^2$ с ограниченным вихрем:

$$\|v\|_V = \operatorname{ess}\max_{x \in D} |\operatorname{rot} v(x)| + \dots \tag{19}$$

Здесь многоточие снова означает младшую норму. Норма поля скорости $v(x, t)$ в пространстве V оценивается *равномерно по* $t \in \mathbb{R}$ [26]. Это наиболее сильная норма, которая еще остается равномерно ограниченной для всех $t \in \mathbb{R}$.

Во всяком случае, очевидно, что определение устойчивости и соответственно неустойчивости представляет интерес лишь в том случае, когда существуют устойчивые течения. Легко установить, что течения с постоянным вихрем устойчивы по Ляпунову в пространстве V.

В трехмерном случае "правильный" выбор нормы неясен, хотя бы потому, что нам неизвестна никакая глобальная теорема существования решения начально-краевой задачи. В то же время, в случае устойчивости по Ляпунову, согласно определению, движения при малых начальных возмущениях должны быть определены для всех $t > 0$. Правда, это в принципе не препятствует постановке задачи *о неустойчивости*, так как коллапс, уход движения на бесконечность за конечное время, следует отнести к случаю неустойчивости. Может быть придется смягчить определение устойчивости по Ляпунову, например, допуская лишь гладкие возмущения из множества, всюду плотного в выбранном функциональном пространстве. Так или иначе, пока что разумными кандидатами на роль "правильной" нормы могут быть C-норма и L_2-норма. При решении проблемы 5 возможен, конечно, и другой выбор, однако, норма должна быть слабее, чем $\max_x |\operatorname{rot} v|$ в случае 3-D течений.

В настоящее время известен лишь один общий результат по обоснованию линеаризации в задаче устойчивости стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости [23]. Однако, в этой работе неустойчивость в случае, когда спектр содержит точку правой полуплоскости, доказана лишь относительно чересчур сильных норм. Другой недостаток этой статьи — наличие дополнительного условия на спектр, а именно — существование спектрального множества, целиком лежащего в правой полуплоскости (на самом деле, даже чуть более сильного). Этот недостаток, думаю, легко устранить, используя подход М. Г. Крейна [24], связанный с "почти — собственными векторами".

Проблема 6. *Обоснование метода Арнольда в теории устойчивости течений идеальной жидкости.*

Несмотря на значительные успехи, достигнутые применением метода В. И. Арнольда, начиная с его пионерских работ середины 60-х годов (см. [25]), многие принципиальные вопросы теории остались в тени и до сих пор остаются неясным.

Проблема 6а. *Доказать устойчивость по Ляпунову в пространстве V в случае, когда двумерное стационарное течение удовлетворяет критерию Арнольда.*

Напомню, что в случае стационарного течения с функцией тока $\psi = \psi(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\psi = F(\Delta\psi), \tag{20}$$

этот критерий требует, чтобы была положительно определенной, либо отрицательно определенной квадратичная форма

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\varphi] = \frac{1}{2}\int\limits_D \left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{\nabla\psi}{\Delta\nabla\psi}(\Delta\varphi)^2\right] dxdy, \tag{21}$$

$$\varphi\big|_{\partial D} = 0. \tag{22}$$

При естественном ограничениях В. И. Арнольд доказал априорную оценку для L_2-нормы вихря возмущения $\|\Delta\varphi(\cdot,t)\|_{L_2(D)}$. Но для таких начальных данных, хотя и известна глобальная теорема существования [26], нет теоремы единственности. Для единственности достаточно предположить, что начальная скорость принадлежит V, то есть $\Delta\varphi \in L_\infty(D)$ (см. также [27], где единственность доказана и для некоторого класса течений с неограниченным вихрем). Таким образом, устойчивость в этом пространстве доказана лишь в некотором ослабленном смысле: если даже возмущенных течений много, то все они мало отличаются от основного стационарного. Естественно возникает следующая проблема.

Проблема 6b. *Доказать (или опровергнуть) единственность решения основной начально-краевой задачи для уравнений Эйлера в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ для случая, когда начальный вихрь принадлежит $L_p(D)$ при некотором $p > 1$.*

Пока приходится признать, что устойчивость по Ляпунову в пространстве V доказана полностью лишь для течений с постоянным вихрем. К слову сказать, для таких течений форма (21) не определена, а результат об устойчивости получается непосредственно.

Пора заметить, что далеко не все стационарные течения удовлетворяют уравнению типа (20) с однозначной и гладкой функцией F. В самом деле, вообще говоря, стационарное течение, определяется уравнением

$$\frac{\mathcal{D}(\psi, \Delta\psi)}{\mathcal{D}(x, y)} = 0, \tag{23}$$

то есть требованием, чтобы ψ и $\Delta\psi$ находились в функциональной зависимости. Например, исходным посылкам Арнольда не удовлетворяет функция тока, определяемая как решение краевой задачи

$$-\Delta\psi = -\psi^3 + 1, \qquad \psi\big|_{\partial D} = 0. \tag{24}$$

В этом случае функция F существует: $\psi = \sqrt[3]{\Delta\psi + 1}$, но она не является гладкой. Другой пример, в котором однозначной функции F, вообще говоря, не существует: функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi^2 + (\Delta\psi)^2 = 1 \tag{25}$$

и краевому условию $\psi\big|_{\partial D} = 0$. Вопрос об устойчивости таких течений остается полностью открытым.

Проблема 6c. *Исследовать устойчивость стационарных течений (24) и (25) и им подобных.*

По всей вероятности, все течения, для которых не существует однозначной функции F, неустойчивы. В этой связи хочу обратить внимание на работы [28, 29], в которых доказано, что решение задачи о максимуме кинетической энергии на множестве изозавихренных полей приводит к течениям с однозначной зависимостью между ψ и $\Delta\psi$.

Далее, принципиально важно развить метод Арнольда, представляющий собой специальную форму прямого метода Ляпунова, применительно к проблеме неустойчивости.

Проблема 6d. *Доказать неустойчивость стационарного течения в случае, когда критерий Арнольда грубо нарушен.*

Все, как-будто, подтверждает справедливость мнения знаменитого автора, что его критерий "близок к необходимому" (см., например, [30]). Однако в гидродинамике вообще очень редко удается доказать неустойчивость прямым методом Ляпунова. Некоторым исключением являются результаты В. Владимирова, полученные с использованием вириалов [31], в задаче о движении тела в жидкости.

Очень обидно, что красивый признак устойчивости трехмерного стационарного течения, полученный Арнольдом, как и предполагал его автор, оказался неприменимым ни к одному течению, исключая, быть может, твердое вращение.

Проблема 6e. *Существует ли устойчивое трехмерное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости?*

Вероятно, даже твердое вращение неустойчиво относительно сильных норм, например, относительно вихревой нормы $\max|\operatorname{rot} v| + \ldots$. Таким образом, если устойчивое течение существует, нужно еще объяснить, в каком смысле (в каком пространстве, и т. п.) оно устойчиво.

IV. Устойчивость простейших ламинарных течений и первый переход.

Проблема 7. *Доказать, что течение Гагена-Пуазейля в круглой трубе, а также течение Куэтта в канале абсолютно устойчивы (то есть устойчивы при любом числе Рейнольдса).*

На сей раз дело идет о вполне строго формулируемых спектральных краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [32]). В случае течения Пуазейля, если ограничиться осесимметричиными возмущениями, нужно доказать, что все собственные значения σ следующей спектральной задачи расположены в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\sigma < 0$:

$$\{(L-\alpha^2) - [\sigma + i\alpha R(1-r^2)]\}(L-\alpha^2)\psi = 0, \tag{26}$$

$$\psi = \psi' = 0, \quad r = 1, \tag{27}$$

где α — волновое число возмущения, R — число Рейнольдса, σ — комплексный параметр, а функция $\psi = \psi(r)$ определена на отрезке $[0,1]$. Дифференциальный оператор L второго порядка определяется равенством

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \tag{28}$$

При $r = 0$ краевого условия нет, и понятно почему — точки оси трубы для исходной краевой задачи в цилиндре — внутренние, и в них нет никаких особенностей. Вместо него ставится "условие ограниченности", вытекающее из требования конечности скорости диссипации энергии (принадлежности поля скорости классу $W_2^{(1)}$). Оно имеет вид

$$\int\limits_0^1 \left(|(L-\alpha^2)\psi|^2 + |\psi|^2\right) r dr < \infty. \tag{29}$$

На самом деле, надо еще рассмотреть соответствующие краевые задачи для неосесимметричных возмущений. Не буду их здесь выписывать.

Требуется доказать, что при любых вещественных α, R все собственные значения σ спектральной задачи (26)–(28) располагаются в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\sigma < 0$.

При $R = 0$ и произвольных α получается самосопряженная краевая задача, и все собственные числа σ отрицательны (состояние покоя, конечно, асимптотически устойчиво). Опираясь на результаты теории возмущений и простые оценки σ-спектра, нетрудно показать, что собственные числа не уходят на бесконечность при конечных значениях числа Рейнольдса R. Отсюда следует, что свойство абсолютной устойчивости эквивалентно несуществованию критического значения числа Рейнольдса.

Под критическим понимаем такое значение $R = R_*$, при котором существует хотя бы одно собственное значение σ_0 на мнимой оси. Его удобно записывать в виде $\sigma_0 = -i\alpha c R$, c — неизвестная вещественная постоянная (фазовая скорость нейтрального возмущения). Итак, проблема абсолютной устойчивости может быть сформулирована в следующем виде.

Доказать, что при любых α, R, c существует лишь нулевое решение краевой задачи для уравнения

$$(L-\alpha^2)^2\psi - \lambda g(r)(L-\alpha^2)\psi = 0 \tag{30}$$

с условиями (27), (28). Здесь положено

$$g(r) = 1 - r^2 - c; \quad \lambda = i\alpha R. \tag{31}$$

Подчеркну, что физический смысл имеют лишь чисто мнимые собственные значения параметра λ. Между тем, если, вместо краевых условий (27), взять краевые условия

$$\psi = L\psi = 0, \quad r = 1, \tag{32}$$

то для функции $\omega = (L-\alpha^2)\psi$ получается самосопряженная краевая задача Штурма-Лиувилля. Все собственные значения параметра λ в таком случае вещественны. Это доказывает абсолютную устойчивость в случае “мягких” краевых условий (32).

Возникает идея — проследить за изменением собственных значений λ при замене краевых условий (27) — на условия (32). Если бы оказалось, что все они остаются вещественными, проблема была бы решена. Увы, это так лишь при $c \notin (0,1)$, а при $c \in (0,1)$ наряду с вещественными, краевая задача (26), (28), (32) допускает и комплексные собственные значения λ [33]. Тот факт, что фазовая скорость нейтрального возмущения должна лежать в интервале значений скорости течения Пуазейля ($V = 1 - r^2$) можно получить и более непосредственно, из интегральных оценок ([33]).

В случае течения Куэтта в канале аналогичным образом приходим к проблеме.

Доказать абсолютную устойчивость плоского течения Куэтта в канале, для чего установить, что краевая задача

$$(D^2 - \alpha^2)^2 u = i\alpha R(y - c)(D^2 - \alpha^2)u, \quad D = \frac{d}{dy}, \tag{33}$$

$$u = Du = 0 \quad (y = \mp 1) \tag{34}$$

на отрезке $[0,1]$ *при любых вещественных* α, R *имеет лишь нулевое решение.*

Надо сказать, что абсолютная устойчивость течений Пуазейля в круглой трубе и Куэтта в канале не вызывает никаких сомнений, поскольку подтверждается многократными, очень объемистыми вычислениями (впрочем, не раз бывало, что “несомненные” утверждения оказывались ошибочными). Более того, для течения Куэтта известно “почти аналитическое” доказательство [34] (вычислительная часть в этой работе свелась к проверке несложного неравенства для функции Бесселя).

Хотелось бы, однако, верить, что существует красивое алгебро-аналитическое доказательство. Я имею в виду общую теорему, из которой непринужденно следовала бы абсолютная устойчивость обоих течений. Эта теорема не может быть очень общей, так как должна использовать довольно глубокие свойства линеаризованных уравнений Навье-Стокса. Дело в том, что для параллельных течений в трубах с некруговым сечением, аналогичных течению Пуазейля, устойчивость, по всей видимости, может теряться при конечных значениях числа Рейнольдса. Надо бы это доказать строго в случае вытянутых эллиптических или прямоугольных сечений.

Интересно еще заметить, что для течения Пуазейля-Куэтта в канале, с профилем $\mathcal{U}(y) = ay + b(1 - y^2)$ абсолютная устойчивость, согласно вычислениям ряда авторов, имеет место не только при $b = 0$ (для чистого Куэтта), но и для достаточно малых значений параметра $k = \left|\frac{b}{a}\right|$, скажем при $k < k_*$; при $a = 0$ получается течение Пуазейля в канале, которое неустойчиво при больших R. По-настоящему хорошая теория должна бы также описать и значение k_*, разделяющее абсолютно устойчивые и неустойчивые течения. Роль компьютера должна быть сведена к вычислению конкретных значений параметров $k_* = k_*(\alpha)$ и $R_* = R_*(k, \alpha)$ при $k > k_*(\alpha)$.

Известны и другие абсолютно устойчивые течения. Это, например, течение Куэтта-Тейлора в случае, когда вращается лишь внешний цилиндр. Другой пример пространственно-периодическое сдвиговое течение Колмогорова с синусоидальным профилем, в случае короткого продольного периода. В этих примерах абсолютная устойчивость доказана, но для них остаются актуальными проблемы нелинейной устойчивости в большом и развития турбулентности, обсуждаемые далее.

Проблема 8. *Принцип изменения устойчивости.*

Когда параметр, от которого зависит основной режим, достигает критического значения, возможны, в условиях общего положения, два основных варианта: либо на мнимой оси появляется пара комплексно-сопряженных собственных значений, либо собственное значение $\sigma_0 = 0$. В первом случае говорят о колебательной неустойчивости, а во втором — о монотонной.

Во втором случае также говорят, что имеет место *принцип монотонности* или *принцип изменения устойчивости*. Последний термин остался от того (недолгого) времени, когда исследователи верили, что в динамике вязкой жидкости неустойчивость всегда монотонна.

В ряде случаев принцип монотонности удалось строго доказать. Назову, во-первых, задачу о свободной конвекции, где результат достигается сведением к спектральной задаче для самосопряженного оператора. Для пространственно-периодического течения Колмогорова с профилем скорости $\mathcal{U} = \sin y$ принцип монотонности доказан в [35] при помощи явных аналитических рассмотрений, связанных с возможностью представить характеристическое уравнение посредством аппарата цепных дробей. Для некоторых исключительных стационарных и периодических по t вращательных течений принцип монотонности установлен в [12, 13]. Иногда удается применить для доказательства принципа монотонности теорему о ведущем положительном собственном числе положительного оператора (Перрон-Фробениус-Иентч-Рутман-М. Г. Крейн).

Однако, в интереснейшем гидродинамическом случае течения Куэтта-Тейлора между вращающимися *в одну сторону* твердыми цилиндрами принцип до сих пор не доказан. Не решена следующая математическая проблема.

Доказать, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ наименьшему критическому значению числа Рейнольдса R спектральной задачи

$$(L - \alpha^2)^2 u - \sigma(L - \alpha^2)u = 2\alpha^2 R\omega(r)v, \tag{35}$$

$$(L - \alpha^2)v - \sigma v = -\lambda g(r)u, \tag{36}$$

$$u = u' = v = 0 \quad (r = r_1,\, r_2) \tag{37}$$

отвечает собственное значение $\sigma = 0$.

Здесь $0 < r_1 < r_2$ — радиусы цилиндров, α — осевое волновое число, функции ω и v выражаются через основной профиль Куэтта

$$v_0 = v_0(r) = Ar + \frac{B}{r} \tag{38}$$

равенствами

$$\omega(r) = \frac{v_0(r)}{r}; \quad g(r) = -\left(\frac{dv_0}{dr} + \frac{v_0}{r}\right). \tag{39}$$

Постоянные A и B определяются краевыми условиями $v_0(r_1) = \Omega_1 r_1$, $v_0(r_2) = \Omega_2 r_2$, где Ω_1, Ω_2 — угловые скорости цилиндров. При этом нужно предполагать, что $\omega(r) \geqslant 0$ при $r \in [r_1, r_2]$, и что выполнено условие Синга $A < 0$ (при $A \geqslant 0$ имеет место устойчивость для любых R).

Весьма многочисленные вычисления и натурные эксперименты не оставляют сомнений в том, что этот принцип монотонности справедлив. В некоторых частных случаях (узкий зазор $r_2 - r_1$, близкие угловые скорости Ω_1 и Ω_2) его удается доказать. В общем случае строгое доказательство отсутствует. Повторю, дело здесь не в строгости как таковой, а в том, что необходимо понять причины явления. Почему автоколебания не возникают при первом переходе? Когда результат будет получен, несомненно, окажется, что вместе с данным частным случаем получат решение и многие другие (для начала — вращательные течения с профилем, отличным от куэттовского (38)).

Замечу, что после спектральной задачи (35)–(37) нужно будет еще рассмотреть и спектральные задачи для не вращательно-симметричных мод, зависящих от полярного угла θ посредством множителя $e^{im\theta}$.

Существование бесконечной последовательности критических значений $R_1(\alpha) < R_2(\alpha) < \ldots$, уходящей на бесконечность, при $\sigma = 0$ доказано сведением к интегральному уравнению с осцилляционным (по Гантмахеру-Крейну) ядром [36]. Таким образом, полностью задачу можно будет считать решенной, когда будет строго доказано, что при $R < R_1$ весь σ-спектр (включая и отвечающий несимметричным модам, при $m \neq 0$) расположен в левой полуплоскости.

В случае разновращающихся цилиндров существование критических значений монотонной неустойчивости, отвечающих возникновению вихрей Тейлора, доказано в [37]. Здесь, однако, принцип монотонности не всегда справедлив: при больших угловых скоростях внешнего цилиндра первый переход может быть связан с возникновением неустойчивой колебательной моды, которая несимметрична.

В советские времена научным работникам нередко нужно было отвечать

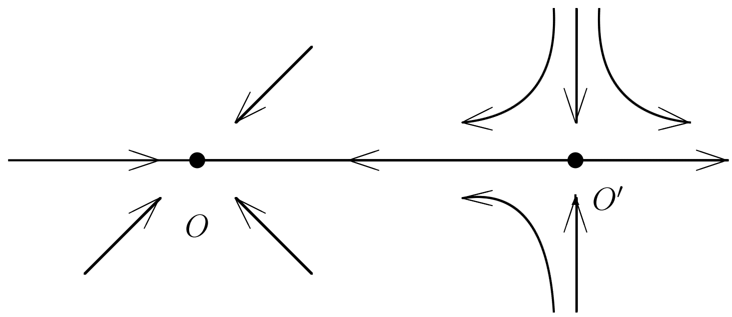

Рис. 3:

на вопрос об экономическом эффекте полученных результатов. Ответ приходилось высасывать из пальца. Но в случае принципа монотонности этот эффект, действительно, можно оценить в рублях или в фунтах. Дело в том, что исследователь то и дело оказывается в типичном положении, описанном Конфуцием, когда нужно ловить черную кошку в темной комнате, а кошка еще и отсутствует. Огромная работа затрачивается, чтобы установить, что колебательная неустойчивость в той или иной ситуации невозможна. А единственным результатом оказывается стандартная меланхолическая фраза в статье: "Колебательная неустойчивость не обнаружена". К тому же, полной уверенности не остается, и следующие авторы снова перепроверяют этот результат. Лишь строгое доказательство принципа монотонности разом избавляет от этой сизифовой работы, экономя массу компьютерного и человеческого времени.

Проблема 9. Неустойчивость "в большом" течений Пуазейля в трубе и Куэтта — в канале (асимптотическая теория бифуркаций).

Как согласовать вывод об абсолютной устойчивости течений Пуазейля в круглой трубе и Куэтта в канале с результатами экспериментаторов, которые, начиная с Рейнольдса, докладывают о наблюдаемой неустойчивости и развитии турбулентных режимов? Общие контуры ответа уже видны, хотя до полной ясности еще далеко. По всей видимости, эти течения, оставаясь устойчивыми в малом при любых числах Рейнольдса R, глобально устойчивы лишь при малых R, а начиная с некоторых значений R, становятся *неустойчивыми*

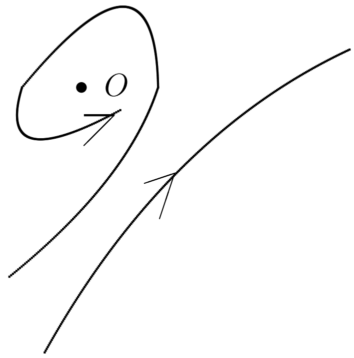

Рис. 4:

в большом. Это происходит оттого, что при $R \to \infty$ область устойчивости в фазовом пространстве стягивается к точке (хотя бы в одном направлении) — которая соответствует самому течению. Такое происходит, например, когда к данному асимптотически устойчивому равновесию O (см. Рис. 3) приближается неустойчивое равновесие O', и в пределе они сливаются. Может, конечно, оказаться, что к равновесию O приближается неустойчивый предельный цикл или более сложное инвариантное множество. Другой вариант — равновесие в пределе влипает в сепаратрисную траекторию (Рис. 4). Результаты компьютерных экспериментов, как будто, свидетельствуют в пользу первого варианта (Рис. 3), хотя ситуацию Рис. 4 труднее обнаружить, и может быть, она еще тоже будет найдена.

Проблема 9а. *Доказать, что течения Пуазейля в круглой трубе и Куэтта в канале неустойчивы в большом.*

Очень важно выяснить, какова природа этой неустойчивости. Если, действительно, реализуется ситуация Рис. 3, то какова природа неустойчивого режима O'? Преодолев огромные вычислительные трудности, авторы работы [38] смогли вычислить двумерные и трехмерные солитоноподобные стационарные решения около течения Куэтта в канале (см. в этой статье ссылки на результаты других авторов о существовании вблизи течения Куэтта пространственно-периодических режимов, даже при меньших числах Рейнольдса). О существовании солитоноподобных решений системы Навье-Стокса в круглой трубе (возможно, нестационарных) говорят результаты о перемежаемости “турбулентных пробок” и зон ламинарного течения Пуазейля в переходном интервале чисел Рейнольдса.

Проблема 9b. *Доказать, что при достаточно больших числах Рейнольдса существуют стационарные (плоские, а также периодические в поперечном направлении) решения системы Навье-Стокса, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к течению Куэтта.*

Проблема 9c. *Доказать, что существуют решения системы Навье-Стокса в круглой трубе типа бегущих солитонов, стремящиеся к течению Пуазейля при $z - ct \to +\infty$ (z — осевая переменная, c — фазовая скорость).*

Проблема 9d. *Доказать существование пространственно-периодических и солитоноподобных, стационарных или периодических по времени бегущих волн, стремящихся при $R \to \infty$ к течениям Пуазейля в круглой трубе и, соответственно, Куэтта в плоском канале.*

По всей вероятности, все эти проблемы 9a–9d будут решены вместе с построением *асимптотической теории бифуркаций.* Я имею ввиду тот случай, когда критическое значение числа Рейнольдса бесконечно велико: $R_* = +\infty$. Дело, конечно, в том, что точка $R = \infty$ — существенно особая для системы Навье-Стокса. Поэтому такая теория должна включать построение погранслойной (или иной?) асимптотики вторичных режимов, сливающихся с основным при $R \to \infty$.

Когда такая теория будет построена (нет сомнений, что это произойдет!), она, разумеется, найдет себе и другие приложения в гидродинамике, а также и в иных областях математической физики.

V. Переходы и хаотические режимы .

Проблема 10. *Найти и строго обосновать существование странных аттракторов в системе Навье-Стокса и ее близких родственниках (задача* *конвекции, многокомпонентная жидкость, магнитная гидродинамика и пр.)*

В ряде гидродинамических задач, с применением натурных и компьютерных экспериментов, уже освоены цепочки переходов от асимптотически устойчивого равновесия (стационарного движения) — через вторичные равновесия, предельные циклы и/или инвариантные двумерные торы — к сложным хаотическим режимам. Трактовка экспериментальных результатов получается в рамках идей и представлений общей теории бифуркаций, однако, даже для обыкновенных дифференциальных уравнений в наиболее интересных случаях дело не доведено до аккуратной проверки условий общих теорем. В последние десятилетия некоторые видные математики стали даже заявлять, что в такого рода задачах возможности строгого математического анализа исчерпаны и в дальнейшем следует полагаться на компьютерные вычисления, и даже проведение строгих доказательств поручить компьютеру. С такой точкой зрения никак нельзя согласиться.

Разумеется, прямые вычисления, а также эксперименты всегда играли в развитии математики значительную роль. Архимед, однако, ни на минуту не подумал, что достаточно определить объем шара и конуса путем взвешивания, и упорно развивал свои методы вычисления объемов до победного конца. Эйлер, Гаусс, Рамануджан ко многим своим открытиям, особенно в теории чисел, пришли в результате обширных вычислений и наблюдений. Но достоянием математики их открытия стали только после развития соответствующих строгих теорий. Применение компьютеров чрезвычайно расширило возможности численного эксперимента, стало решающим в исследовании свойств процессов, описываемых дифференциальными уравнениями.

Пожалуй, математики никогда и не думали, что нужно буквально все на свете обосновывать с полной строгостью. Если смотреть на математику как на инструмент исследования природы (для меня это лишь одна, но главная, сторона дела), то ее характерной чертой является стремление получить абсолютно достоверные результаты. Между тем, зачастую достаточно, чтобы результат был получен с вероятностью 0.99, а то и 0.6. Высокая достоверность стоит очень дорого — скажем, строгое доказательство оценок погрешностей вычисления (“доказательные вычисления” по К. И. Бабенко) требует затрат машинного времени много большего, чем само вычисление.

Не лишне заметить, что строгие математические доказательства дают, конечно, результат с абсолютной достоверностью, но. . . лишь при $t \to +\infty$. Сколько раз бывало, что ошибочность доказательств важных результатов обнаруживалась спустя годы, а то и десятилетия. Говорят , процентов тридцать из теорем, публикуемых в журналах типа “Comptes rendus” или “Доклады Академии наук СССР”, оказываются неверными.

Кажется очевидным, что наиболее фундаментальные результаты, на которых многое держится, должны быть обоснованы математически совершенно строго. Иначе эффект карточного домика быстро превратит наши умозаключения в гадания на кофейной гуще.

Допускаю, что в будущем строгие обоснования результатов внутри компьютеров, проверка которых доступна также лишь компьютерам, будут иметь значение, например, при расчете конструкций, от которых зависят человеческие жизни. Но у математики есть ведь и “человеческая сторона”. Вспомним об огромной эстетической и этической ценности математики. Примечательно, что недавно она послужила одним из доводов для увеличения грантов NSF для математиков.

Возвращаясь к нашей проблеме, замечу, что наибольшие шансы ее решения связаны с асимптотическими методами и методами теории бифуркаций. В частности, при исследовании пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта-Тейлора (течение вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами) задача приводится к амплитудным системам на центральном многообразии ([39]), ([40]). Компьютерный эксперимент с этими системами обнаруживает гомоклинические бифуркации, каскады удвоения предельных циклов, возможно, и иные переходы, ведущие к образованию разнообразных хаотических режимов. Проблема, первоначально поставленная для уравнений

Навье-Стокса, приводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений сравнительно невысокого порядка (шестого или восьмого, а после редукции — даже четвертого или пятого).

Здесь следует вспомнить, что и для обыкновенных дифференциальных уравнений в теории есть изрядные дыры. Например, С. Смейл [1] ставит проблему, которая в несколько вольном изложении звучит так: “Доказать, что в системе Лоренца существует аттрактор Лоренца. ” Ведь до сих пор экспериментальное наблюдение аттрактора Лоренца и общие теоремы существования не соединились: никто не проверил, что общие условия выполнены для конкретной системы Лоренца. Думаю, что дальнейшее развитие асимптотических методов позволит решить и эту проблему Смейла, и нашу проблему 10, скажем, для течения Куэтта-Тейлора. Правда, в последнем случае анализ урезанной амплитудной системы должен еще быть дополнен доказательством того факта, что найденные аттракторы выдерживают учет отброшенных членов степенного разложения. Но эта техническая проблема кажется вполне преодолимой (конечно, надо быть готовыми к тому, что некоторые из этих аттракторов исчезнут).

Нетрудно указать и другие гидродинамические ситуации, связанные с вырожденными бифуркациями, предрасполагающие к появлению странных аттракторов и хаотических режимов.

Конечно, различные асимптотические случаи, и прежде всего, случай исчезающей вязкости, подсказывают иные пути поиска хаотических режимов течения.

VI. Асимптотика исчезающей вязкости и турбулентность.

Нет ни малейшего сомнения, что проблема течения жидкости при очень малой вязкости (или, точнее, при больших числах Рейнольдса) — главнейшая в гидродинамике. В определенном смысле все предыдущие проблемы являются ее более или менее существенными частями.

Проблема 11а. *Верно ли, что при $\nu \to 0$ решение системы Навье-Стокса в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$ с твердой неподвижной границей ($v\big|_{\partial D} = 0$), при заданном начальном поле скорости ($v\big|_{t=0} = v_0(x)$) стремится к решению уравнений Эйлера с тем же начальным условием и граничным условием $v_n\big|_{\partial D} = 0$?*

Пусть данные задачи ∂D, v_0 и внешняя массовая сила, если она есть, C^∞-гладки.

Конечно, здесь надо бы объяснить, в каком смысле понимается этот предельный переход. Равномерно по любой внутренней подобласти? В среднем, по норме $L_p(D)$? По мере?. . Пока что трудно высказать по этому поводу какую-нибудь разумную гипотезу.

Главная трудность здесь связана с присутствием твердой стенки. Даже в двумерном случае, где имеются сильные теоремы существования как для уравнений Навье-Стокса, так и для уравнений Эйлера, ситуация совершенно неясна. Если границы нет, скажем, в случае пространственно-периодических течений (уравнения на торе T^2), либо на границе поставлены "мягкие" краевые условия: $v_n\big|_{\partial D} = 0$, $\operatorname{rot} v\big|_{\partial D} = 0$, то все в порядке [41]: предельный переход при $\nu \to 0$ обосновывается при помощи интегральных оценок вихря.

Другой трудный случай — когда начальное поле скорости на некоторых кривых претерпевает разрыв. Случай *слабого разрыва*, когда скорость, а тогда и давление, непрерывны, и имеет место лишь скачок вихря, вполне поддается анализу [44, 42]. Все дело в том, что в безграничной жидкости при гладких данных вообще нет пограничного слоя, а при слабом разрыве или "мягких" краевых условиях уравнения пограничного слоя линейны и допускают явное решение. Может быть, еще важнее, что заранее известно, где образуется этот пограничный слой — на всей границе, либо на всей линии слабого разрыва. На линиях сильного разрыва и на твердых стенках пограничные слои описываются уравнениями Прандтля, которые нелинейны, а главное, не могут описать течение вблизи *всей* твердой границы или линии сильного разрыва. Фундаментальным препятствием является *отрыв* *пограничного слоя.*

Замечу, что и на свободной границе жидкости погранслой — слабый, линейный. (О результатах В. А. Батищева, В. В. Пухначева, Л. С. Срубщика и других авторов см. [44, 43]). Впрочем, и здесь до строгой теории далеко из-за принципиальных трудностей с теоремами существования.

Проблема 11b. *Найти предел при $\nu \to 0$ стационарного решения системы Навье-Стокса. В частности, найти асимптотику стационарного обтекания твердого тела вязкой жидкостью.*

Помимо трудностей, связанных с отрывом пограничного слоя, в стационарных (и периодических по t) задачах возникает еще серьезная трудность в определении предельного режима течения. Стационарные уравнения Эйлера обладают бесконечным множеством стационарных решений, и проблема состоит в том, какое из них является предельным при заданных условиях. Эта трудность усугубляется еще и тем, что заранее неизвестна степень гладкости предельного стационарного режима. Если он разрывен, нужно еще определить место и характер разрывов.

Естественно встает и вопрос об устойчивости этих стационарных режимов. Скорее всего, при больших числах Рейнольдса они неустойчивы. Гидромеханики, однако, обычно предполагают, что асимптотика еще работает и для тех умеренных значений числа Рейнольдса, для которых устойчивость сохраняется. К этому можно добавить, что возникающие автоколебательные режимы при малых закритичностях остаются близкими к стационарному течению настолько, что интегральные характеристики, скажем, сила сопротивления, мало отличаются от стационарных.

Проблема 11c. *Найти среднее поле скорости в развитой турбулентности, в пределе $\nu \to 0$ ($\mathrm{Re} \to \infty$), а также вычислить корреляции*

$$\langle v(x', t) \otimes v(x'', t) \rangle,$$

то есть средние значения всевозможных произведений компонент поля скорости в данный момент t в точках x' и x'' области течения. Найти *также корреляционные функции, отвечающие различным моментам времени t' и t''*

$$\langle v(x',t') \otimes v(x'',t'') \rangle.$$

Этой проблеме посвящена огромная литература [46], см. также недавний обзор [47]. Однако все без исключения существующие теории турбулентности лишь в небольшой относительно мере опираются на уравнения гидродинамики. Во всяком случае, все они содержат те или иные гипотезы, не выведенные из уравнений Навье-Стокса, а возможно, и противоречащие им. Замечу, что некоторые из этих теорий довольно неплохо предсказывают среднее поле скорости. Например, вряд ли может быть случайным совпадение вычисленного среднего профиля турбулентного течения Куэтта в канале с экспериментальными данными, обнаруженное в работе [49]. Однако с предсказанием более сложных характеристик течения, начиная с корреляционных функций 2-го порядка, не говоря уже о высших, не справляется, пожалуй, ни одна из теорий.

У меня нет ясного ответа на неизбежно возникающий вопрос о том, какое именно осреднение имеется в виду в постановке проблемы 11с. Наиболее расхожие варианты — осреднение по времени и по инвариантной мере на фазовом пространстве системы. В случае эргодичности эти два вида средних совпадают. Добиваясь совпадения результатов теории с экспериментальными данными, возможно, придется также учесть, что измерительный прибор производит и своего рода осреднение по малой области пространства.

Я все-таки верю, что может быть создана последовательная теория развитой турбулентности, описывающая течения при весьма малой вязкости. Можно предвидеть, что эта теория разветвится на несколько рукавов. Вероятно, придется по-разному описывать турбулентные течения в трубах, турбулентные конвективные течения и течения Куэтта-Тейлора, турбулентное обтекание тела и т. д. Правда, отсутствие общей теории приводит к куда большему разветвлению, чуть ли не каждое течение приходится рассматривать отдельно, то и дело вводя ad hoc новые гипотезы. Пока что проблема состоит в том, чтобы справиться с построением асимптотики хотя бы в одном случае.

В некоторых ситуациях эксперименты дают столь красивые и ясные результаты, что просто стыдно для теоретиков не уметь их описывать. Например, для течения Куэтта-Тейлора между цилиндрами (когда внешний цилиндр неподвижен), для азимутальной скорости v_θ еще Тейлор (1923)получил формулу $v_\theta = \dfrac{c}{r}$, справедливую всюду, кроме пограничных слоев (см. [48]). Весьма примечательно, что при очень больших числах Рейнольдса давно уже потерявшие устойчивость вихри Тейлора вновь оживают и, по-видимому, сохраняются при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Прекрасный обзор результатов по турбулентным вихрям Тейлора см. в [45]. Немало простых и явных зависимостей обнаружено также в экспериментах по бенаровской конвекции в горизонтальном слое жидкости. Я считаю небезнадежной проблему строгой математической трактовки этих явлений и закономерностей.

В проблемах 11b и 11c нет никаких оснований ожидать единственности. Вполне возможно существование нескольких стационарных режимов, имеющих даже различные асимптотики исчезающей вязкости (такова ситуация в течении Куэтта между твердыми сферами и течении Кармана между вращающимися плоскостями). Наряду с турбулентными вихрями Тейлора, существуют иные турбулентные режимы, да и сами турбулентные вихри Тейлора при заданных внешних условиях не определяются однозначно, варьирует их осевое волновое число.

В заключение подчеркну, что речь здесь идет именно о развитой турбулентности, о пределе исчезающей вязкости. Теория переходов при умеренных числах Рейнольдса должна в идеале описать все мыслимые типы режимов течения, условия их возникновения и гибели при движении по параметрам, а также дать способы их вычисления. По-видимому, невозможно без конкретных компьютерных расчетов предсказать, какая именно последовательность переходов реализуется в каждой заданной ситуации. Теория должна научить исследователя правилам, по которым одни режимы течения сменяются другими,и методам вычисления различных типов режимов. Очень важно, конечно, научиться задавать правильные вопросы, верно определять, какие именно величины подлежат вычислению в первую очередь. Можно сказать, что эта теория скорее будет напоминать правила уличного движения, чем расписание поездов. Впрочем, вполне можно надеяться, что асимптотические методы позволят в различных предельных случаях предсказывать и последовательности переходов.

REFERENCES

[1] S. Smale. Mathematical Problems for the Next Century // The Mathematical Intelligencer, vol. 20, no. 2, 1998, pp. 7–15.

[2] Мартынов Г. А. проблема фазовых переходов в статистической механике// Успехи физ. наук РАН. 1999. Том 169, т 6. С. 595–624.

[3] Фридкин В. М. Сегнетоэлектрики-полупроводники. М.: Наука, 1976. — 408 с.

[4] Юдович В. И. Глобальная разрешимость — против коллапса в динамике несжимаемой жидкости // Под ред. В. Б. Филиппова. В книге "Математические события XX века". М.: изд-во "Фазис".

[5] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. (English translation: Ladyzhenskaya O. A. The mathematical theory of viscous incompressible flow. New York - London - Paris: Gordon and Breach Science Publishers. XVIII, 224 p. (1969).)

[6] Finn R., Smith D. R. On the stationary solutions of Navie-Stokes equations in two dimensions. Arch. Rat. Mech. and Anal. **25**. No. 1 (1967). 26–39.

[7] Leray J. Etude de diverses équations integrales non lineaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl., serie 9, **12** (1933), 1–82.

[8] Юдович В. И. Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР, 1960, т. 130, вып. 6. С. 1214-1217.

[9] Юдович В. И. Вращательно-симметричные течения несжимаемой жидкости сквозь круговое кольцо. Часть 1,2 // Деп. в ВИНИТИ.

[10] Hopf E. Ein allgemeiner Endlichkeitsatz der Hydrodynamik. Math. Ann. **117** (1941), 764–775.

[11] Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде // Мат. сборник. Т. 74(116), 1967, т 4. С. 565-579.

[12] Юдович В. И. О периодических дифференциальных уравнениях с самосопряженным оператором монодромии // ДАН, 1999, Т. 368, т 3, 338-341.

[13] Юдович В. И. Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии // Мат. сборник, 2001, Том. 192, т 3. С. 137–160.

[14] Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону, изд-во РГУ, 1984. 192 с. (Англ. перевод: Yudovich V. I. "The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory", In.: Translation of mathematical monographs, **74**, American Mathematical Society, Providence, Rodeisland, 177 p., (1989))

[15] a) Милославский А. И. Теория Флоке для абстракных параболических уравнений. Канд. диссертация. Ростов-на-Дону, 1976. b) Милославский А. И. К теории Флоке для параболических уравнений // Функц. анализ. Том. 10, вып. 2 (1976), 80–81. c) Милославский А. И. Теория Флоке для абстрактных параболических уравнений. Базисность корневых подпространств оператора модуляции // Деп. в ВИНИТИ 1975, т 3073-75. d) Милославский А. И. Решения Флоке и приводимость одного класса дифференциальных уравнений в банаховом пространстве //Известия СКНЦ ВШ. Естественные Науки 4 (1975), 82–87.

[16] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974. 661 с. (Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part III. Spectral operators. New York-London-Sydney-Toronto: Wiley-Interscience, 1971)

[17] Hopf E. Über die Anfangswerwertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. Nachrichten, **4** (1950–51), 213–149.

[18] Мешков В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка //Мат. сборник, 1991. Т. 182, т 3. С. 364–383ю

[19] Юдович В. И. О потере гладкости решения уравнения Эйлера со временем // Сб. "Динамика сплошной среды"Новосибирск, 1974. Вып. 16. С. 71-78.

[20] Юдович В. И. О постепенной потере гладкости и неустойчивости внутренне присущих течениям идеальной жидкости // ДАН. Т. 370. т 6, 2000. С. 760-763

[21] Yudovich V. I. On the loss of smoothness of the solutions to the Euler equations and the inherent instability of an ideal fluid flows // Chaos. 2000. Vol. 10, Issue 3. pp. 705-719.

[22] Юдович В. И. О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости // Мат. заметки. Т. 67, т 4. 2000.

[23] Friedlander S., Strauss W., Vishik M. Nonlinear instability in an ideal fluid. // Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire 14, No. 2, 187-209 (1997).

[24] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970, 534 с.

[25] Arnold V. I. Sur la géométrie différentialle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 316–361.

[26] Юдович В. И. Плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости// Докл. АН СССР, 1961. Т. 136, т 3. С. 564-567.

[27] Yudovich V. I. Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid // Mathematical research Letters, 2, 1995. Pp. 27-38.

[28] Shnirelman A. Lattice theory and flows of ideal incompressible fluid, Russ. J. Math. Phys. **1** (1993), no. 1,79–105)

[29] Burton G. R. Rearrangements of functions, maximizations of convex functional, vortex rings, Math. Annalen **276** (1987), 225–253. Variational problems on classes of rearrangements and multiple configuration s for steady vortices, Ann. Inst. Henry Poicaé **6** (1989), no. 4, 295–319.

[30] Belenkaya L, Friedlander S., Yudovich V. I. The unstable spectrum of oscillating shear flows // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1999, Vol. 59, no. 5, pp. 1701-1715.

[31] Vladimirov V. A. On the instability of equilibrium of fluids. J. Appl. Mech. Tech. Phys. **30** (1089), no. 2, 269–276. Direct Lyapunov method in problems of fluid equilibrium instability, Arch. Mech. **42** (1990), no. 4–5, 595–607.

[32] Линь-Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., 1958, 189 с.

[33] Юдович В. И. О некоторых спектральных задачах с дифференциальным весом (к задаче абсолютной устойчивости течения Пуазейля)// Деп. в ВИНИТИ, 1988, т 2168-В88.

[34] Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта. — Ин-т проблем механики АН СССР, 1971, препринт т 1, с. 26.

[35] Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. Т. 25 (1961). С. 1700–1705. (Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane

movement of an incompressible viscous liquid // translation from Prikl. Mat. Mekh. 25, 1140-1143 (1961))

[36] Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1966. Т. 30, вып. 4, с. 688–698.

[37] Барковский Ю. С., Юдович В. И. Спектральные свойства одного класса краевых задач // Мат. сборник, 1981. Т. 114 (156), 3. С. 438-450.

[38] Cherhabili A., Ehrenstein U. Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow // J. Fluid Mech. (1997), vol. 342, pp. 159–177.

[39] Chossat P., Iooss G. The Couette-Taylor Problem. Applied Mathematical Sciences. Vol. 10. Springer-Verlag New York, 1994.

[40] Колесов В. В., Юдович В. И. "Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Известия РАН, МЖГ, 1998, 4, с. 81-93.

[41] Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ, 1963. Т. 3, т 6. С. 1032-1066.

[42] Срубщик Л. И., Юдович В. И. Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости //Докл. АН СССР, т. 199, т 3, 1971. С. 563-566.

[43] Батищев В. А., Срубщик Л. С. Диффузия сферического вихря Хилла при исчезающей вязкости // Доклады АН СССР. 1971 Т. 197. т 5.

[44] Пухначев В. В. Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск, изд-во НГУ, 1979.

[45] Koschmieder E. L., Bérnard Cells and Taylor Vortices. Campridge University Press, 1993. 337 p.

[46] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Часть I. М.: Наука, 1965. 639 с. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Часть II. М.: Наука, 1967. 720 с. (Monin A. S., Yaglom A. M. Statistical Fluid Mechanics, The Mechanics of Turbulence, Vol. 1, (1971) MIT Press, Cambridge, Mass. ; Statistical Fluid Mechanics, The Mechanics of Turbulence (revised and augmented edition), Vol. I, Chap. 2, CTR Monograph, Center for Turbulence Research, Stanford.)

[47] Yaglom A. M. New Trends in Turbulence, Proc. of Summer School, Les Houches (to be published)

[48] Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: изд-во ИЛ, 1959. 400 с.

[49] Berdichevsky V. L., Fridlyand A. A., Sutyrin V. G. Prediction of turbulent velocity profile in Couette and Poiseuille flows from the first principles // Phys. Rev. Lett., vol. 76, no. 31, pp. 3967–3970, 1996.

[50] Constantin P., Foias C. Navier-Stokes Equations. University of Chicago Press, 1988.

[51] Gallavotti G. Foundations of Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 2001.

[52] Chemin J.-K. Perfect Incompressible Fluid. OUP, 1998.