АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ.

# Лекция 1.
# Введение.

Один мой коллега однажды сказал в разговоре:«Если уравнение содержит малый параметр, то это нужно использовать». Именно нужно, не можно, не «приятно и полезно», а нужно. Действительно, очень часто бывает, что при решении той или иной задачи для дифференциальных уравнений как раз для малых значений параметра (или для больших, что по сути сводится к тому же) все стандартные методы отказывают. Обычно в таких ситуациях панацеей оказываются асимптотические методы.

Этот несколько расплывчатый термин объединяет классические *методы Лапласа, метод стационарной фазы, метод перевала* — для оценки интегралов, содержащих большой параметр, *метод пограничного слоя* для исследования решений дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) с малым параметром при всех или части старших производных, различные варианты *метода осреднения* для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих быстро колеблющиеся по времени и/или по пространству коэффициенты либо свободные члены. Можно еще назвать методы *многомасштабных разложений*, ряд специальных методов для уравнений с медленно меняющимися параметрами, для уравнений с сингулярностями и т. д. Надо сказать, что классические методы находятся в постоянном развитии, их приходится усовершенствовать для решения новых задач. Не прекращается и процесс возникновения новых асимптотических методов.

Вы уже встречались со *степенными асимптотическими разложениями* в курсе математического анализа, хотя, наверное, не употребляли этого термина. Фактически теория рядов Тейлора начинается с установления того факта, что скалярная функция $f(x)$, имеющая, скажем, в окрестности нуля, для $x \in (-a, a)$, $a > 0$, производные до порядка $n + 1$ непрерывные около нуля, допускает представление в виде

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + R_n(x), \qquad (1.1)$$

где остаточный член $R_n(x)$ подчинен оценке

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (1.2)$$

В качестве константы $M_{n+1}$ можно взять $\max |f^{(n+1)}(x)|$ на любом сегменте $[-b_n, b_n]$, $b_n > 0$ который целиком содержится в интервале $(-a, a)$. К сожалению, тогда и оценка (1.2), а вместе с ней и асимтотическое представление (1.1), работают только на этом сегменте. Вообще равенство (1.1) представляет ценность лишь для малых $x$. Если, например, мы хотим вычислить функцию $f(x)$, отбрасывая остаточный член, да так, чтобы абсолютная погрешность не превосходила $\Delta$, то $x$ нужно взять столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$|x| \leq \left[\frac{(n+1)!}{M_{n+1}}\Delta\right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{1.3}$$

Конечно, это лишь достаточное условие, хотя и близкое к необходимому при очень малых $x$.

Так вот, все это и означает, что отрезок ряда Тейлора дает асимптотику функции $f(x)$ при $x \to 0$.Более общее определение: будем говорить, что вектор-функция $u(\varepsilon)$, определенная для $\varepsilon$ из некоторой окрестности нуля $(-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$, $\bar{\varepsilon} > 0$, и принимающая значения в банаховом пространстве $X$, допускает *степенное асимптотическое разложение*

$$u(\varepsilon) \sim u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \tag{1.4}$$

при $\varepsilon \to 0$, с постоянными (не зависящими от $\varepsilon$) коэффициентами $u_0$, $u_1, \ldots$, если для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ существуют положительные постоянные $K_n$ и $\overline{\varepsilon}_n$ такие, что выполняется равенство

$$u(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^n u_n + R_n(\varepsilon), \tag{1.5}$$

причем для всех $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}_n, \bar{\varepsilon}_n]$ остаточный член $R_n(\varepsilon)$ подчинен оценке

$$||R_n(\varepsilon)||_X \leq K_n \varepsilon^{n+1}. \tag{1.6}$$

В теории и практике асимтотических методов часто употребляются символы $O$ и $o$. Например, мы можем написать, согласно (1.1), (1.2) что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1}), \quad x \to 0. \tag{1.7}$$

Из (1.5), (1.6) следует представление

$$u(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} u_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.8}$$

вообще запись $\varphi(x) = O(g(x))$, $x \to 0$ означает, что должна существовать такая константа $K > 0$ и такое $\bar{x}_0$, что для всех $x \in [-\bar{x}_0, \bar{x}_0]$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \le K|g(x)|. \tag{1.9}$$

Мы пишем $\varphi(x) = o(g(x))$, $x \to 0$, если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, с довольно существенной потерей информации, согласно (1.1), (1.2), можно написать, что $R_n(x) = o(x^n)$. Как Вы, надеюсь, помните из курса анализа, лишь этот более слабый, чем оценка (1.2), результат получается, когда известно только, что функция $f(x)$ имеет непрерывную в окрестности нуля производную.

Подчеркну, что сами по себе символы $O$ и $o$ лишены смысла до тех пор, пока не указано, к какому пределу стремится аргумент, например, $x \to 0$ или $x \to +\infty$.

Надо сказать, что при вычислении функций при помощи ее разложения Тейлора обычно мы ограничиваемся небольшим числом членов ряда. Таким образом, ряд Тейлора, сходимость которого, понятно очень важна для теории, используется скорее как асимптотическое разложение. Когда имеется оценка остаточного члена, скажем, типа (1.2), то мы можем получить оценку погрешности и полностью обосновать численный результат. К сожалению, на практике оценки типа (1.2) ил (1.6) оказываются довольно грубыми. Неравенство (1.3) может, например, требовать, чтобы $|x|$ был меньше 0.1, а на самом деле вполне возможно, что нужный результат справедлив и при $x = 10$. Поэтому в вычислительной математике мы зачастую вынуждены довольствоваться не абсолютно надежным результатом, а результатом, который справедлив лишь с хорошей долей вероятности. Надежность стоит дорого. Замечательный российский математик Константин Иванович Бабенко разрабатывал специальные методы для *доказательных вычислений*. Он сумел сконструировать мощные численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений и программы, которые проводили полные оценки погрешности. Оказалось однако, такого рода результат требует многократно большего машинного времени, чем обычные методы. Дело, конечно, в том, что для абсолютной надежности приходится провести вычисления с существенно большей точностью. Это требовало увеличения разрядности расчетов (иногда в десятки раз). Вы, конечно, знаете, что машинное время возрастает экспоненциально с увеличением числа разрядов. Можно сказать, что всем этим стоит заниматься лишь в том случае, когда результат исключительно важен, когда от него, например, зависят человеческие жизни. Мы, прикладные математики, должны помнить, что не так уж редко жизни людей зависят от того, что верно $a > 0$ или $a < 0$. Представьте себе, что $a$ — это вычисляемая нами характеристика космического аппарата, а неравенство $a > 0$ означает, что он будет работать устойчиво.

Говоря о степенных асимптотических разложениях, полезно вспомнить те выводы, с которыми Вы познакомились в курсе математического анализа при изучении рядов Тейлора. Если известно, что функцию $f(x)$ можно разложить в сходящийся степенной ряд, так что $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то коэффициенты $a_n$ определяются однозначно: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Но если построить ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ для некоторой $C^\infty$ – гладкой функции, то мы должны быть готовы к тому, что он окажется расходящимся. Еще более удивительно, что он может сходиться, но не к функции $f(x)$. Соответствующий пример привел Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897). Он был великим математиком, у него были замечательные ученики (в том числе Софья Ковалевская). Среди многих его замечательных результатов несколько особняком стоят *контрпримеры*, которые отучали его современников от скороспелых умозаключений и развеивали предрассудки. Ведь в 19-м веке современное понятие о математической строгости только начинало складываться. Напомню, что именно Вейерштрасс установил, что непрерывная функция может не иметь производной ни в одной точке

**Пример Вейерштрасса.** Определим на вещественной прямой скалярную функцию

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0. \tag{1.11}$$

Положим $f(0) = 0$. Это значение естественно получается продолжением по непрерывности. Возникает же функция, которая не только непрерывна, но и бесконечно дифференцируема. При этом $f^{(n)}(0) = 0$ (припомните, как Вы это доказывали на первом курсе). Выходит, что ряд Тейлора этой функции в окрестности точки $x = 0$ есть $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots = 0$, и конечно, «более чем» сходится. Однако же его сумма совсем не похожа на функцию (1.11).

Разумеется, после того, как Вейерштрасс построил свой пример, каждый может, сохраняя идею, привести сколь угодно, аналогичных, например, вместо функции (1.11) можно взять $e^{-\frac{1}{|x|}}$ или $e^{-\frac{1}{|x|^\alpha}}$ для любого $\alpha > 0$. Важно заметить, что если такого рода функцию Вейерштрасса прибавить к некоторой функции $f(x)$, то это не изменит степенного асимптотического разложения. Выходит, что бесконечно много различных функций имеют одно и то же степенное асимптотическое разложение (а сходящийся ряд Тейлора определяет функцию однозначно!).

Когда изучаешь анализ, такие функции как (1.11) выглядят некими досадными исключениями. На самом же деле они постоянно встречаются в прикладной математике, в частности, в различных ситуациях, связанных с дифференциальными уравнениями матеатической физики.

Не удержусь от замечания. Часто бывает, что для решения дифференциального уравнения, содержащего малый параметр $\varepsilon$, можно построить степенное асимптотическое разложение по параметру $\varepsilon$. Это однако не означает, что можно точно найти решение. В последний десяток лет выяснилось, что целый ряд глубоких и интересных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений и математической физики может быть решен лишь в том случае, если использовать "вейерштрассову компоненту"решения. В некоторых случаях такую *суперасимптотику* удалось построить, многие другие задачи ждут своего решения.

**Асимптотики решений дифференциальных уравнений**. Название этого пункта довольно забавно — оно вполне бы подошло для сочинения томов этак в 5. В действительности это огромная, живая и развивающаяся область математики и физики. Существует довольно много асимптотических методов, применяемых к различным проблемам и ситуациям. Пожалуй, многим из этих методов посвящены десятки, а то и сотни статей и книг. Например, вся качественная теория дифференциальных уравнений и теория динамических систем посвящены одному вопросу: как ведет себя *движение* (решение автономного дифференциального уравнения или итерация отображения), когда время $t \to \infty$ (в случае итераций $t$ пробегает лишь натуральные значения). Много интересных вопросов и результатов имеется по проблеме поведения решений дифференциального уравнения около его особой точки (см., например, книги по специальным функциям, в частности, по функциям Бесселя и сферическим функциям). Перечисленные два вопроса относятся к проблеме поведения решений, когда аргумент (пространственная переменная или время) стремится к некоторому особенному значению. В этом курсе однако мы будем главным образом рассматривать задачи для уравнений, содержащих малый или большой параметр. Это, конечно, означает, что речь пойдет об асимптотике при $\varepsilon \to 0$ или при $\omega \to \infty$. Собственно, всегда, когда мы (математики) говорим, что $\varepsilon$ — малый параметр, то это и означает, что мы собираемся заниматься асимптотикой при $\varepsilon \to 0$. А если мы говорим, что $\omega$ — большой параметр, то это означает, что речь пойдет об асимтотике при $\omega \to \infty$.

В этом разделе я ограничусь несколькими простыми результатами и примерами. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \tag{1.12}$$

$$x(0) = a. \tag{1.13}$$

Пусть правая часть $f$ в (1.12) есть гладкое векторное поле, зависящее аналитически от вещественного параметра $\varepsilon$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Это означает, что ряд Тейлора

$$f(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, t)\varepsilon^k \tag{1.14}$$

сходится при достаточно малых $\varepsilon$ (при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0$ — известное положительное число). Будем предполагать, что эта сходимость равномерна по $x$, $t$ в некоторой, достаточно большой, области в $\mathbb{R}^{m+1}$, содержащей, во всяком случае, точку $(a, 0)$. Предполагается также, что $a = a(\varepsilon)$ зависит от $\varepsilon$ аналитически. Дальше однако, ради краткости, будем считать, что такой зависимости нет. Нетрудно доказать, что решение $x(t)$ задачи (1.12)–(1.13) зависит от $\varepsilon$ аналитически, так что решение возможно представить в виде степенного ряда

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots + \varepsilon^n x_n(t) + \ldots \tag{1.15}$$

Это разложение существует для всякого отрезка времени $[-\bar{t}, \bar{t}]$, который содержится в интервале задания решения $x_0(t)$ вырожденной задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, t, 0), \\ &x(0) = a. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Зная, что такое разложение возможно, нетрудно найти его коэффициенты прямой подстановкой в (1.12), (1.13) с последующим разложением левых и правых частей в ряд по степеням $\varepsilon$ (*метод неопределенных коэффициентов*). Таким путем, в частности, получаем для $x_1$, $x_2, \ldots$ задачи Коши

$$\dot{x}_1 = f_{0x}(x_0(t), t)x_1 + f_1(x_0(t), t), \quad x_1(0) = 0, \tag{1.17}$$

$$\dot{x}_2 = f_{0x}(x_0, t)x_2 + \frac{1}{2}f_{0xx}(x_0, t)x_1^2 + f_{1x}(x_0, t)x_1, \quad x_2(0) = 0. \tag{1.18}$$

Здесь использованы обозначения $f_{0x}$ — производная по $x$ поля $f_0$, так что $f_{0x}\xi$ есть

$$f_{0x}\xi = \frac{\partial f_{0i}}{\partial x_k}\xi_k e_i, \tag{1.19}$$

$e_1, \ldots, e_m$ — канонический базис в $\mathbb{R}^m$. Вторая производная $f_{0xx}$ есть билинейный оператор, который всякой паре векторов $\xi$ и $\eta$ ставит в соответствие вектор $f_{0xx}(\xi, \eta)$ (в случае, когда $\eta = \xi$ пишем $f_{0xx}\xi^2$):

$$f_{0xx}\xi\eta = \frac{\partial^2 f_{0i}(x_0(t), t)}{\partial x_j \partial x_k}\xi_j \eta_k e_i, \tag{1.20}$$

Присмотримся к задачам Коши (1.17), (1.18). Если $x_0$ считать известным, то для определения $x_1$ получается линейная система. Когда уже найдены $x_0$ и $x_1$, для определения $x_2$ тоже получается линейная задача Коши (1.18). Вообще, оказывается, что $x_n(t)$ в (1.15) должен быть определен посредством решения задачи Коши

$$\dot{x}_n = f_{0x}(x_0(t), t)x_n + h_n(t), \quad x_n(0) = 0, \tag{1.21}$$

где $h_n(t)$ — вектор-функция, которая полностью определена, если уже найдены $x_0(t)$, $x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$.

Законность разложения (1.15), то есть аналитическую зависимость решения от параметра $\varepsilon$, проще всего обосновать при помощи *абстрактной теоремы о неявной функции*. Ее можно найти во многих книгах по функциональному анализу, например, Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [ЛС], В. А. Треногина [Тр], Дьедонне [Дьед], пока я не стану на этом останавливаться. Радиус сходимости ряда (1.15) можно оценить при помощи метода мажорант, который я дальше проиллюстрирую на примерах.

Замечу еще, если для правой части $f(x, t, \varepsilon)$ известно лишь степенное асимптотическое разложение вида (1.14), то и для решения $x(t)$ находится степенное асимптотическое разложение (1.15). В общем надо признать, что случай, когда от малого параметра $\varepsilon$ зависит лишь правая часть дифференциального уравнения, и эта зависимость гладкая, довольно тривиален, допускает общее решение (такие ситуации особенно любимы чистыми математиками).

Ситуация принципиально меняется, когда малый параметр стоит множителем при всех или некоторых производных (для уравнений высшего порядка — при старших производных). Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1.22}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — вектор-функции, принимающие значения соответственно в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^l$. Правые части пусть по-прежнему зависят от $\varepsilon$ аналитически около точки $\varepsilon = 0$. Теперь, если положить $\varepsilon = 0$, получится *вырожденная система*

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f(x_0, y_0, t, 0), \\ 0 &= g(x_0, y_0, t, 0), \end{aligned} \tag{1.23}$$

Пусть для системы (1.22) нужно решить задачу Коши с начальным условием $x(0) = a$, $y(0) = b$.

Ясно, что решение вырожденной системы (1.23) никак не может приблизить решение полной системы (1.22) равномерно на этом интервале задания. Действительно, представим себе, что из второго уравнения (1.23) $y_0$ можно выразить через $x_0$, $t$. Тогда подстановка в первое уравнение (1.23) даст нам уравнение в $\mathbb{R}^m$, которое вместе с начальным условием $x_0(0) = a$ однозначно определит вектор-функцию $x_0(t)$. После этого также однозначно определится начальное значение $y_0(0)$. При этом исходное условие $y(0) = b$ оказывается полностью забытым. Конечно, как правило, оно будет нарушено. Разумеется, этот дефект решения вырожденной системы невозможно исправить, разыскивая решение полной системы (1.22) в виде рядов по степеням $\varepsilon$. Вместе с тем нельзя сказать, что решение вырожденной системы полученное таким путем степенное асимптотическое разложение (во многих случаях его удается получить) бесполезны. Часто оказывается, что решение вырожденного уравнения и полученные на его основе дальнейшие приближения хорошо работают всюду вне малой окрестности начального момента $t = 0$. Этот дефект оказывается устранимым при помощи того или много варианта *второго итерационного процесса (первый* *итерационный процесс* — это построение разложения по степеням $\varepsilon$, удовлетворяющего формально системе (1.22). Об одном из таких методов — *методе пограничного слоя* — я собираюсь рассказать в этом курсе. Он состоит в том, чтобы при помощи перехода к специальным «растянутым» координатам найти поправки к результату первого итерационного процесса вблизи точки $t = 0$. Аналогичные, и даже более трудные, вопросы приходится решать, рассматривая краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Об этом тоже речь пойдет дальше, а пока ограничусь одним простейшим примером.

Рассмотрим задачу Коши при $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{x} = -x + 1, \\ &x(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Дальше получаем мгновенно:

$$x(t) = 1 - e^{-t/\varepsilon} \tag{1.25}$$

Если попытаться разыскивать решение этой задачи Коши в виде степенного ряда (а может быть степенного асимптотического разложения — делать нужно то же самое)

$$x(t) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \tag{1.26}$$

то для определения $x_0$ получим вырожденное уравнение

$$0 = -x_0 + 1.$$

Его решение $x_0(t) = 1$. Так как это уравнение *конечное* (не дифференциальное), то о начальном условии речи нет. Для следующих членов разложения (1.26) получим соотношения

$$x_n = -\dot{x}_{n-1}, \quad n = 1,\, 2, \ldots \tag{1.27}$$

Отсюда последовательно находим $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots$, $x_n = 0, \ldots$. Таким образом, первый итерационный процесс дает разложение $\tilde{x}(t) = 1$. Посмотрим, какое отношение этот результат имеет к истинному решению (1.25). Когда $t \to \infty$, согласно (1.25), $x(t) \to 1$. Более того, чем меньше $\varepsilon$, тем быстрее $x(t)$ выходит на свое предельное значение, см. Рис. 1.

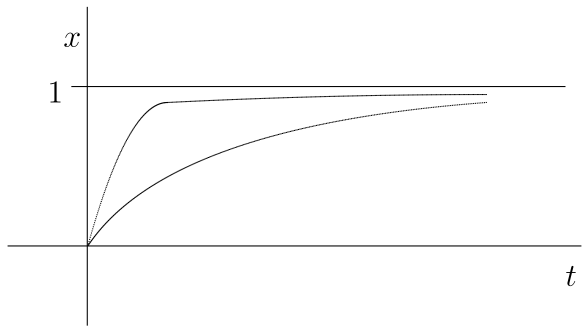


Рис. 1:

Если взять $t = t_n = n\varepsilon \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$, то получится, что $x(t_n) - \tilde{x}(t_n) = x(t_n) - 1 = \varepsilon^n$. Очевидно, ввиду монотонности экспоненты, что при $t > t_n$ справедлива оценка

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon^n. \tag{1.28}$$

Таким образом, получается, что $\tilde{x}(t) = 1$ дает хорошее приближение для точного решения $x(t)$, но лишь для значений $t$ не слишком близких к 0. Можно, в частности утверждать, что *$x(t) \to \tilde{x}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на любом отрезке $[\delta, \infty]$ при любом $\delta > 0$.* Но как бы ни было мало $\varepsilon$, вблизи точки $t = 0$ на малых отрезках длины $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$ нужно изучать решение отдельно. Ясно, что при фиксированном $t > 0$ экспонента $e^{-t/\varepsilon}$ есть функция вейерштрассовского типа. Это и есть типичная *погранслойная функция.* Мы увидим, что такого рода функции помогают получать хорошие (это значит, равномерные по всей области определения решения) асимптотики для гораздо более сложных, чем (1.24), уравнений. К таким результатам приводит метод пограничного слоя.

Один из родоначальников асимптотических методов Пьер Симон Лаплас (1749–1827) в связи с проблемами теории вероятностей (закон больших чисел) изучал поведение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-\lambda f(x)}\, dx$$

при больших $\lambda$. По поводу своей асимптотической формулы, давшей начало *методу Лапласа*, он выразил свое законное восхищение словами, которые стали девизом для всех асимптотических методов: эта формула тем более точна, чем более она необходима.

## Упражнения к лекции 1.

1. Изучить асимптотики функций при $x \to 0$ и при $x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
&a)\ f(x) = x + 2x^4 + 1750e^{-x},\\
&b)\ f(x) = \sin x + 2\cos x + \frac{1}{1+x^2},\\
&c)\ f(x) = \frac{2+e^{2x}+x^2}{2+e^x-x^2},\\
&d)\ f(x) = e^{x^2} + e^x,\\
&e)\ f(x) = e^{x^2}\sin x + e^x.
\end{aligned}
$$

2. Может ли ряд Тейлора функции $f(x)$ в заданной точке $x_0$ быть сходящимся, но не к $f(x_0)$?

3. Как вы ответите на следующие типичные «вопросы на засыпку»?:

a) разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = x + 2x^4$.

b) разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin x + 2\cos x$.

4. Может ли расходящийся степенной ряд, скажем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ в окрестности точки $x = 0$ служить степенным асимтотическим разложением некоторой функции? Если нет, докажите это. Если да, приведите пример.

5. Докажите, что степенные асимптотические разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$ можно перемножать, а если $g(0) \neq 0$, то и делить на $g(x)$. Точнее, нужно доказать, что если

$$f(x) = f_0 + xf_1 + x^2 f_2 + \dots,$$

$$g(x) = g_0 + xg_1 + x^2 g_2 + \dots,$$

то асимптотическое разложение произведения $f(x)g(x)$, а если $g(0) \neq 0$, то и частного, можно получить, соответственно, перемножая или деля друг на друга асимптотические разложения функций $f$ и $g$.

6. Можно ли, имея степенное асимптотическое разложение функции $f(x)$ при $x \to 0$, получить асимптотические разложения для интеграла $\int\limits_0^x f(s)ds$ и для производной $f'(x)$ — тоже, конечно, при $x \to 0$?

7. Как изменятся задачи Коши (1.17), (1.18), (1.21), если $a = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots$ ?

## Лекция 2. Регулярные асимптотики — степенные асимптотические разложения.

Математический анализ и функциональный анализ содержат ряд общих теорем, помогающих нам исследовать поведение решений различных уравнений (конечных, дифференциальных, интегральных, и т. д.) при слабом и, в том или ином смысле, регулярном возмущении. Среди них простейшие и наиболее употребительные — *принцип сжатых отображений* и *теорема о неявной функции.* Конечно, абстрактная теорема дает нам лишь план действий при решении конкретных задач. В каждом случае нужно, чтобы применить заключение теоремы, проверить выполнение ее условий. Это и есть реализация плана. Замечу, что сплошь и рядом проверка условий общих теорем сама требует применения теорий более низкого уровня абстрактности, относящихся к рассматриваемой задаче. Нередко эта "проверка условий" требует гораздо более глубоких и изощренных рассмотрений, чем сами абстрактные теоремы.

Начнем с рассмотрения теорем о неявной функции и их приложений. Из курса анализа Вы, должно быть, помните простейшую теорему о неявной функции.

**Теорема 2.1** (скалярная теорема о неявной функции). *Пусть уравнение*

$$f(x, y) = 0, \tag{2.1}$$

*где $f$ — скалярная функция скалярных аргументов $x$ и $y$, при $x = x_0$ имеет решение $y = y_0$, так что*

$$f(x_0, y_0) = 0. \tag{2.2}$$

*Пусть функция $f$ задана и непрерывно дифференцируема по $x$ и по $y$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть выполнено условие*

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{2.3}$$

*Тогда в некоторой окрестности точки $x_0$, то есть при $-\delta < x - x_0 < \delta$ (положительное число $\delta > 0$ определяется функцией $f$) определена функция $y = y(x)$ (неявная функция) такая, что выполнены условия*

$1^0$. *$f(x, y(x)) = 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

$2^0$. *$y(x_0) = y_0$.*

$3^0$. *Условия $1^0$ и $2^0$ определяют неявную функцию $y(x)$ однозначно.*

$4^0$. *Для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема, и при этом*

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}. \tag{2.4}$$

*В частности, $y'(x_0) = -f_x(x_0, y_0)/f_y(x_0, y_0)$.*

Доказательство я опускаю, но сделаю несколько замечаний по этой важной теореме. Во-первых, будем помнить, что в ней речь идет лишь об одном известном решении $y = y_0$ при заданном значении $x = x_0$. Вполне возможно, что существуют и другие решения, скажем $y_1$, $y_2, \ldots$, так что $f(x_0, y_1) = 0$, $f(x_0, y_2) = 0, \ldots$. Таких решений может быть даже бесконечно много. Соответственно, при значениях $x$ близких к $x_0$ вполне может существовать много иных решений — о которых теорема не говорит нам ничего.

Во-вторых, замечу, что формула (2.4) получается непосредственным дифференцированием равенства $1^0$ теоремы — если существование непрерывно дифференцируемой неявной функции уже доказано. Если же известно, что функция $f$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ непрерывно дифференцируема $k$ раз ($C^k$ – гладкая), то можно доказать, что и неявная функция $y(x)$ является $C^k$ – гладкой. Для ее производных можно получить рекуррентные формулы, последовательно дифференцируя равенство

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{2.5}$$

После первого дифференцирования получаем

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = 0, \tag{2.6}$$

откуда и следует формула (2.4). Второе дифференцирование приводит к равенству (опустим для краткости аргумент $x$):

$$f_{xx}(x, y) + 2 f_{xy}(x, y) y' + f_{yy}(x, y) y'^2 + f_y(x, y) y'' = 0. \tag{2.7}$$

Отсюда можно выразить $y''(x)$ — при $x$ близких к $x_0$ — через $y(x), y'(x)$. При $x = x_0$ вторая производная $y''(x_0)$ из (2.7) находится явно. Важно, конечно, что $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, а по непрерывности, неравенство $f_y(x, y(x)) \neq 0$ сохраняется и при $x$ достаточно близких к $x_0$. Продолжая дифференцирование, можно найти выражения для $y'''$, $y^{IV}$ и т. д.

Ясно, что эти выражения становятся все более и более громоздкими. Поэтому на практике удобнее (первым это заметил И. Ньютон!) разыскивать неявную функцию $y(x)$ в виде степенного ряда (а точнее, степенного асимптотического разложения), то есть положить

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + y_2(x - x_0)^2 + y_3(x - x_0)^3 + \ldots. \tag{2.8}$$

Для коэффициентов $y_k$ известны выражения через производные от $y$ в точке $x_0$: $y_k = \dfrac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$. При этом числа $y^{(k)}(x_0)$ можно определить явно при помощи рекуррентных формул.

Важно заметить, что, как доказал Коши, *степенной ряд* (2.8) сходится, если функция $f$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ аналитична, то есть представима в виде сходящегося степенного ряда

$$\begin{gathered} f(x,y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} f_{kl}(x - x_0)^k (y - y_0)^l, \\ f_{kl} = \frac{1}{(k+l)!} \frac{\partial^{k+l} f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Коэффициенты в (2.8) быстрее всего находятся в результате подстановки в уравнение (2.5) с последующим разложением функции $f(x, y(x))$ в ряд по степеням $x - x_0$. Это — *метод неопределенных коэффициентов.* Применяя его, мы забываем что коэффициенты разложения (2.8) можно выразить через производные функции $y$ (можно — не значит нужно!). Напротив, вычислив коэффициенты $y_1$, $y_2$, ..., мы можем вычислить и производные $y^{(k)(x_0)}$.

**Теорема о неявной функции для системы уравнений.**

Рассмотрим теперь систему (конечных) уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Будем рассматривать скалярные переменные $x_1, \ldots, x_m$ как параметры, а (тоже скалярные) переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ как неизвестные. Введем точки

$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Система (2.10) запишется в виде

$$f_i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.11}$$

Предположим, что для некоторого набора параметров $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ известно решение $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ системы (2.11), так что

$$f_i(x^0, y^0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.12}$$

**Теорема 2.2** (многомерная теорема о неявной функции). 1)*Пусть функции $f_1 \dots, f_n$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, для которой выполняются уравнения (2.12). 2) Пусть матрица Якоби*

$$\left(\frac{\partial f_i(x^0, y^0)}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n$$

*невырожденна, так что отличен от нуля ее определитель (якобиан):*

$$\det \left(\frac{\partial f_i(x^0, y^0)}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n \neq 0. \tag{2.13}$$

*Тогда существует "неявная функция" (точнее, неявное отображение) $y = y(x)$, определенная для всех $x$ из некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^m$, так что для всех таких $x$*

$$f_i(x, y(x)) = 0. \tag{2.14}$$

*При этом выполняется начальное условие $y(x^0) = y^0$. Решение $y(x)$ непрерывно дифференцируемо (существуют и непрерывны производные $\dfrac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$). Для $x$ из некоторой окрестности точки $x^0$, в некоторой окрестности точки $y_0$ нет иных решений, кроме $y(x)$(имеет место единственность).*

Конечно, утверждение о единственности здесь носит локальный характер — вдали от решения $y(x)$, при значениях параметров $x_i^0, \dots, x_m^0$ (и близких к ним) вполне могут существовать иные решения.

В классических курсах анализа невырожденность матрицы или линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ привычно отождествляется с отличием от нуля ее определителя. Однако, вычисление определителя — отнюдь не простая задача при больших $n$. И что это за число, значение которого не представляет интереса, а важно лишь, что оно отлично от нуля? Обидно тратить время на его вычисление. Во многих случаях, особенно в задачах механики и математической физики, невырожденность (или, что то же, обратимость) оператора $A$ можно проще доказать непосредственно.

Когда мы пытаемся перенести ту или иную "конечномерную" теорему на бесконечномерный случай, тут же выясняется, что многие понятия (например, определитель) не допускают бесконечномерного обобщения. Если такое обобщение даже возможно, то не в общем случае оператора в банаховом пространстве, а лишь для очень ограниченного класса операторов. Это заставляет нас понять, что и в конечномерном случае употребление таких понятий не обязательно, а как правило, и нерационально. Так обобщение помогает нам лучше понять и исходные конечномерные теории.

Имеется несколько различных обобщений теоремы о неявной функции (правильнее было бы говорить *"о неявном отображении"*, но термин "неявная функция" уже укоренился). Я приведу одно из них — простейший и важнейший, принадлежащий Гильдебрандту и Грэйвсу.

**Абстрактная теорема о неявной функции.**

Нам понадобится дальше понятие производной от оператора. Пусть оператор $Q : X \to Y$ действует из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$. Скажем, что оператор $Q$ в точке $x_0 \in X$ *дифференцируем по Гато*, если для любого $u \in X$ существует предел

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}[Q(x_0 + su) - Q(x_0)] = Q'_G(x_0)u. \tag{2.15}$$

Этот предел будем понимать в смысле сходимости по норме пространства $Y$. Возможны и другие варианты. Если считать, что предел в (2.15) понимается в смысле *слабой сходимости*, получится определение *слабой дифференцируемости по Гато*. Определенный таким способом оператор $Q'_G(x_0) : X \to Y : u \mapsto Q'_G(x_0)u$ называется (сильной) *производной Гато* оператора $Q$ в точке $x_0$. Нетрудно видеть, что этот оператор однороден: для любых $u \in X$ и $\lambda \in R$ справедливо равенство (докажите!)

$$Q'_G(x_0)(\lambda u) = \lambda Q'_G(x_0)u. \tag{2.16}$$

Вместе с тем, производная Гато может и не быть линейным оператором (приведите пример!).

Р. Гато (R. Gateaux) — французский математик, ученик и сотрудник

Адамара, офицер французской армии, пропал без вести во время первой мировой войны. Его работы были опубликованы посмертно в 1919 году.

Теперь определим *производную Фреше* оператора. Скажем, что *оператор $Q$ в точке $x_0 \in X$ дифференцируем по Фреше, если существует такой линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, что справедливо равенство*

$$Q(x_0 + u) - Qx_0 = Au + R(x_0, u), \tag{2.17}$$

*причем для остаточного члена $R(x_0, u)$ выполняется предельное равенство*

$$\frac{||R(x_0, u)||_Y}{||u||_X} \to 0, \tag{2.18}$$

*при $u \to 0$ по норме* (то есть $||u||_X \to 0$). В этом случае линейный оператор $A$ называется производной Фреше оператора $Q$ в точке $x_0$ и обозначается через $Q'(x_0)$. Обычно, говоря о производной оператора, имеют в виду именно производную Фреше.

Морис Фреше (Maurice Fréchét) — известный французский математик, академик, один из зачинателей функционального анализа. Пространства Фреше до сих пор являются актуальным объектом исследования математиков. Оказалось, однако, что гораздо более богата и гораздо более важна для приложений теория банаховых пространств, введенных в 1920 г. независимо С. Банахом и Н. Винером. Стефан Банах вместе с польской математической школой стал развивать теорию этих пространств в таком неистовом темпе, что Н. Винер быстро отстал. Норберт Винер сам признавал, что название *банаховы пространства* или *B-пространства* вполне справедливо.

Недостаток определения Фреше состоит в том, что в нем нет способа вычисления оператора $A = Q'(x_0)$. Поэтому на практике мы обычно вычисляем сначала производную Гато, а затем стараемся доказать, что она и есть производная также и по Фреше. При этом мы пользуемся тем простым фактом, что *если производная Фреше $Q'(x_0)$ существует, то она и является производной Гато.* Действительно, по определению производной Фреше, из (2.17) следует равенство

$$\frac{1}{s}[Q(x_0 + su) - Q(x_0)] = Au + \frac{1}{s}R(x_0, su). \tag{2.19}$$

Из (2.18) следует, что второе слагаемое справа стремится к нулю при

$s \to 0$. Действительно,

$$||\frac{1}{s}R(x_0, su)|| = \frac{||R(x_0, su)||}{||su||} \cdot ||u|| \to 0, \tag{2.20}$$

согласно (2.18), так как $||su|| \to 0$. Поэтому существует производная Гато $Q'_G(x_0) = A$.

В итоге выходит, что вычислив производную Гато, мы должны убедиться в том, что она является линейным ограниченным оператором, и сверх того, выполняется предельное равенство (2.18). Так мы и находим производную Фреше $Q'(x_0)$. Если же производная Гато $Q'_G(x_0)$ не существует, или существует, но не является линейным ограниченным оператором, то оператор $Q$ в точке $x_0$ не дифференцируем по Фреше.

Скажем, что оператор $Q : X \to Y$ дифференцируем по Фреше в некоторой области $D$ пространства $X$, если он дифференцируем по Фреше в каждой точке этой области. Интересно еще исследовать характер зависимости производной $Q'(x)$ от точки $x$.

При фиксированном $x$ оператор $Q'(x) : X \to Y$–линейный и непрерывный. Вместе с тем, его зависимость от точки $x$ может быть сложной и нелинейной. Сейчас мы фактически должны вести речь об операторе $Q' : x \to Q'(x) : X \to (X \to Y)$, действующем из $X$ в пространство $(X \to Y)$ — в пространство линейных операторов, действующих из $X$ в $Y$. Надеюсь, Вы помните, что пространство линейных операторов $(X \to Y)$ само является банаховым пространством. Норма в нем определяется как норма линейного оператора. Скажем, что оператор $Q$ *непрерывно* дифференцируем в окрестности точки $x_0 \in X$, если введенный только что оператор $Q'$ непрерывен (по норме) в точке $x_0$. Более подробно: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$||Q'(x_0 + u) - Q'(x_0)|| < \varepsilon, \tag{2.21}$$

для всех $u \in X$ таких, что $||u|| < \delta$.

Интересно также пойти дальше и определить вторую производную $Q''(x_0)$ и последующие. Попробуйте сделать это самостоятельно, используя данные выше определения. Заметьте, что $Q'' : X \to (X \to (X \to Y))$ есть оператор, действующий (по-прежнему) из $X$ в пространство линейных операторов, которому принадлежит $Q'(x)$, то есть в пространство линейных операторов $(X \to (X \to Y)))$ из $X$ в $(X \to Y)$. О производных операторов и их приложениях можно прочитать в [ЛС, КанАк].

Теперь мы вполне готовы сформулировать *абстрактную теорему о неявной функции*. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{2.22}$$

где $x$ — элемент вещественного банахова пространства $X$, играющий дальше роль векторного параметра. Вектор $y \in Y$ играет роль неизвестного в уравнении (2.22).

**Теорема 2.3.** *Пусть оператор $F : X \times Y \to Z : (x, y) \mapsto F(x, y) \in Z$ действует из декартова произведения $B$ – пространств $X$ и $Y$ в $B$ – пространство $Z$. Пусть выполнены условия*

$1^0$. *$F(x_0, y_0) = 0$ для некоторых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.*

$2^0$. *Оператор $F$ определен и непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$.*

$3^0$. *(Главное условие). Частная производная $F_y(x_0, y_0)$ — обратимый оператор, так что существует обратный оператор $[F_y(x_0, y_0)]^{-1}$.*

*Тогда для всех $x$ из некоторой окрестности точки $x_0$ в $X$ существует решение $y(x)$ уравнения (2.22), так что*

$$F(x, y(x)) = 0. \tag{2.23}$$

*При этом отображение $y : x \mapsto y(x)$ непрерывно дифференцируемо (значит, и непрерывно) и удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$. В некоторой окрестности точки $y_0$ в $Y$ нет иных решений, кроме $y(x)$ (локальная единственность). Для производной $y'(x)$ справедлива формула*

$$y'(x) = -[F_y(x, y(x))]^{-1} F_x(x, y(x)), \tag{2.24}$$

*которая при $x = x_0$ дает равенство*

$$y'(x_0) = -[F_y(x_0, y_0)]^{-1} F_x(x_0, y_0). \tag{2.25}$$

Заметим, что для $x$ близких к $x_0$, оператор $[F_y(x, y(x))]^{-1}$ существует, по теореме об обратимости оператора близкого к обратимому.

Доказательство теоремы 2.3 и более общих теорем можно найти в книгах [Дьед, Тр, КанАк].

**Контрольная работа 1 по курсу асимптотические методы в прикладной математике. Тема: классический метод малого параметра.**

В каждом задании будут задачи двух типов: 1) вычислить первую и вторую производные (Фреше) оператора, действующего из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$. 2) Найти первые 2 – 3 ведущих члена разложения по малому параметру для решения задачи Коши или краевой задачи.

Предполагается, что студент, приступающий к выполнению этого задания знает (помнит!) определения производной по Гато и Фреше, метод малого параметра и общую теорему о неявной функции.

## Примерные задания.

**Задание 1.**

1. Вычислить первую и вторую производные Фреше оператора $F : C[0,1] \to C[0,1]$, действующего по правилу

$$(Fx)(s) = 2x(s) - \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}(s+t) \sin x(t)\, dt.$$

2. Найти первые два члена разложения по малому параметру $\varepsilon$ для решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &x^{IV} = \sin 2t + \varepsilon x^3, \\ &x(0) = x''(0) = 0, \quad x(\pi) = x''(\pi) = 0. \end{aligned}$$

**Задание 2.**

1. Вычислить первую и вторую производные Фреше оператора $F : C(\Pi) \to C(\Pi)$, где $\Pi = [0,1] \times [0,2]$ — прямоугольник, а оператор $F$ действует по правилу

$$(Fu)(x) = e^x u(x,y) + \int\limits_\Pi \frac{\sin (x+y)^2}{x+y} u^4(y)\, dy.$$

2. Найти ведущие члены разложения по малому параметру $\varepsilon$ решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - x = 1 - \cos(\varepsilon x), \\ &x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

**Задание 3.**

1. Вычислить первую и вторую производные Фреше оператора $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$F\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\xi - \eta\zeta\\ \beta\eta - \zeta\mu\\ \gamma\zeta - \mu\xi\\ \delta\mu - \xi\eta\end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

2. Вычислить корень уравнения

$$x - 3 \cdot 10^{-5} \sin x = 1$$

с точностью до $10^{-12}$.

**Задание 4.**

1. Найти первую и вторую производные оператора $F$ действующего из $B$ – пространства $X$ в $B$ – пространство $Y$ (где $X$ — пространство $C^2$ – гладких функций на $[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям $u(0) = u(1) = 0$, $Y = C[0, 1]$) по правилу

$$(Fu)(x) = u''(x) + 2u'^2(x) - 3\cos u(x)$$

2. Найти первые два члена разложения по малому параметру $\varepsilon$ решения краевой задачи в прямоугольнике $\Pi = [0, \pi] \times [0, \pi]$ для уравнения

$$\Delta u = \sin x + \varepsilon u^2, \quad u\big|_{\partial\Pi} = 0.$$

**Задание 5.**

1. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda$ применима (и при каких — неприменима) теорема о неявной функции к задаче о разложении по малому параметру $\varepsilon$ решения краевой задачи в прямоугольнике $\Pi = [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\Delta u + \lambda u = \sin{(x + 2y)} + \varepsilon u^3, \quad u\big|_{\partial\Pi} = 0.$$

2. Оператор $F$ действует из $C[0, 1]$ в $C[0, 2]$. Из какого пространства — в какое действует $F''(u_0)$?

## Список литературы

[Вайн] *Вайнберг Б. Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики / М.: Изд-во МГУ, 1982, 293 с.

[ВайнТр] *Вайнберг М. М, Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.: Наука, 1969, 528 с.

[Дьед] *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа / М.: Мир, 1964, 430 с.

[КанАк] *Канторович А. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах / М.: Физматгиз, 1959, 684 с.

[Коп] *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения / М.: Изд-во Мир, 1966, 159 с.

[ЛС] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа / М.: Гостехиздат, 1951.

[Моис] *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики / М.: Наука, 1969.

[Най] *Найфе А.* Введение в методы возмущения / М.: Изд-во Мир, 1984, 535 с.

[Олв] *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции / М.: Наука, 1990.

[Тр] *Треногин В. А.* Функциональный анализ / М.: Наука, 1993.

[Фихт] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1 / М.: Физматгиз, 1962, 607 с.

[Юдов] *Юдович В. И.* Вибродинамика, ч. I.